

Mathematische Formelsammlung

Analysis

1. Folgen und Grenzwerte

1.1. Definition:

Eine Funktion mit $\mathbb{N}^* = \{1; 2; 3; \dots\}$ als Definitionsbereich heißt **Folge**.

1.2. Definition:

Eine Folge (a_n) heißt **monoton steigend**, wenn für alle Folgenglieder gilt: $a_n \leq a_{n+1}$,
eine Folge (a_n) heißt **monoton fallend**, wenn für alle Folgenglieder gilt: $a_n \geq a_{n+1}$.

1.3. Definition:

Eine Folge (a_n) heißt

nach oben beschränkt, wenn es eine Zahl S gibt, sodass für alle $n \in \mathbb{N}^*$: $a_n \leq S$,

nach unten beschränkt, wenn es eine Zahl s gibt, sodass für alle $n \in \mathbb{N}^*$: $a_n \geq s$.

1.1. **Satz:** Sind die Folgen (a_n) und (b_n) konvergent und haben sie die Grenzwerte a und b , dann gilt:

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$$

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \quad \text{für } b_n \neq 0, b \neq 0$$

2. Funktionen

2.1. Definition:

Eine **Funktion** f ist eine Zuordnung, die jedem Element aus einer Definitionsmenge \mathbb{D}_f genau ein Element aus einer Wertemenge \mathbb{W}_f zuordnet.

2.2. Definition:

Eine Funktion der Form $f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $n \in \mathbb{N}$, heißt **ganzzrationale Funktion**.
Ist $a_n \neq 0$, so hat f den **Grad n**.

2.3. Satz (Symmetrie):

Gilt $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{D}$, so ist der Graph von f **achsensymmetrisch** zur y- Achse.

Gilt $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{D}$, so ist der Graph von f **punktsymmetrisch** zum Ursprung $(0|0)$.

2.4. Definition:

Eine Zahl $x_1 \in \mathbb{D}$, für die $f(x_1) = 0$ ist, heißt **Nullstelle** der Funktion f .

2.5. Satz:

Ist x_1 eine Nullstelle einer ganzzrationalen Funktion f vom Grad n , dann lässt sich $f(x)$ in der Form $f(x) = (x - x_1) \cdot g(x)$ schreiben. Dabei ist $g(x)$ ein Polynom vom Grad $n - 1$.

2.6. Satz:

Eine ganzzrationale Funktion vom Grad n hat höchstens n Nullstellen.

3. Gebrochenrationale Funktionen

3.1. **Definition:**

Eine Funktion f mit $f(x) = \frac{a_n \cdot x^n + a_{(n-1)} \cdot x^{(n-1)} + \dots + a_1 \cdot x + a_0}{b_m \cdot x^m + b_{(m-1)} \cdot x^{(m-1)} + \dots + b_1 \cdot x + b_0}$, $a_i \in \mathbb{R}$, $b_i \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$, heißt **gebrochenrational**, wenn diese Darstellung nur mit einem Nennerpolynom möglich ist, dessen Grad mindestens 1 ist.

3.2. **Definition:**

Gegeben ist die **Funktion** f mit dem vollständig gekürzten Funktionsterm $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$. Ist in dieser Darstellung $q(x_0) = 0$ und $p(x_0) \neq 0$, so nennt man x_0 eine **Polstelle** von f .

3.3. **Satz:**

Ist x_0 Polstelle einer gebrochenrationalen Funktion f , so gilt: $|f(x)| \rightarrow +\infty$ für $x \rightarrow x_0$.

Die Gerade mit der Gleichung $x = x_0$ heißt **senkrechte Asymptote** des Graphen von f .

3.4. **Satz:**

Der Graph einer gebrochenrationalen Funktion f mit

$$f(x) = \frac{a_n \cdot x^n + a_{(n-1)} \cdot x^{(n-1)} + \dots + a_1 \cdot x + a_0}{b_m \cdot x^m + b_{(m-1)} \cdot x^{(m-1)} + \dots + b_1 \cdot x + b_0}, \quad a_n \neq 0, b_m \neq 0$$

hat für $|x| \rightarrow \infty$ im Falle

$n < m$ die x-Achse als waagrechte Asymptote,

$n = m$ die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{a_n}{b_m}$ als waagrechte Asymptote,

$n = m + 1$ eine schiefe Asymptote, deren Gleichung man mithilfe der Polynomdivision erhält,

$n > m + 1$ eine Näherungskurve, deren Gleichung man mithilfe der Polynomdivision erhält.

4. Differenzialrechnung

4.1. **Definition:**

Die Funktion f sei auf einem Intervall I definiert und $x_0 \in I$.

Wenn der Differenzenquotient $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ für $x \rightarrow x_0$ einen Grenzwert besitzt, so heißt f an der Stelle x_0 **differenzierbar** (oder ableitbar). Man nennt den Grenzwert die **Ableitung von f an der Stelle x_0** und schreibt dafür $f'(x_0)$.

4.2. **Satz (Potenzregel):**

Für $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{Z}$ ist $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

4.3. **Satz (Summen- und Faktorregel):**

Die Funktionen g und h seien auf einem Intervall I definiert und an der Stelle $x \in I$ differenzierbar, so gilt:

- $f = g + h$ ist in x differenzierbar und es ist $f'(x) = g'(x) + h'(x)$
- $f = c \cdot g$ mit $c \in \mathbb{R}$ ist in x differenzierbar und es ist $f'(x) = c \cdot g'(x)$.

4.4. **Satz (Kettenregel):**

Ist $f = u \circ v$ eine Verkettung zweier Funktionen, so gilt $f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$.

4.5. Satz (Produktregel):

Ist $f = u \cdot v$ ein Produkt zweier Funktionen, so gilt $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$.

4.6. Satz (Quotientenregel):

Ist $f = \frac{u}{v}$, ($v(x) \neq 0$) ein Quotient zweier Funktionen, so gilt $f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$.

4.7. Satz (Ableitung der Umkehrfunktion):

Ist die Funktion f in einem Intervall I umkehrbar und differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$ für $x \in I$, dann ist die Umkehrfunktion \bar{f} ebenfalls differenzierbar, und es gilt: $\bar{f}'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ mit $y = f(x)$ bzw. $x = \bar{f}(y)$.

4.8. Satz:

Für die Funktion f mit $f(x) = \sin(x)$ gilt $f'(x) = \cos(x)$.

Für die Funktion f mit $f(x) = \cos(x)$ gilt $f'(x) = -\sin(x)$.

Für die Funktion f mit $f(x) = e^x$ gilt $f'(x) = e^x$.

Für die Funktion f mit $f(x) = \ln(x)$ gilt $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Für die Funktion f mit $f(x) = a^x$ gilt $a^x = e^{x \cdot \ln(a)}$.

4.9. Definition:

Eine Funktion f mit der Definitionsmenge \mathbb{D} heißt an der Stelle $x_0 \in \mathbb{D}$ **stetig**, wenn gilt $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)) = f(x_0)$.

4.10. Satz:

Ist eine Funktion f an einer Stelle x_0 differenzierbar, dann ist sie in x_0 auch stetig.

4.11. Definition:

Die Funktion f sei auf dem Intervall I definiert, wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ gilt:

Aus $x_1 < x_2$ folgt $f(x_1) < f(x_2)$, dann heißt f **streng monoton steigend** in I .

Aus $x_1 > x_2$ folgt $f(x_1) > f(x_2)$, dann heißt f **streng monoton fallend** in I .

4.12. Satz (Monotonie):

Die Funktion sei auf dem Intervall I definiert.

Ist $f'(x) > 0$ für alle $x \in I \Rightarrow f$ ist streng monoton steigend.

Ist $f'(x) < 0$ für alle $x \in I \Rightarrow f$ ist streng monoton fallend.

4.13. Definition:

Die Funktion f sei auf ein Intervall I definiert. Der Funktionswert $f(x_0)$ heißt:

- **lokales Maximum von f** , wenn es eine Umgebung $U(x_0)$ gibt, so dass für alle Werte aus $U(x_0) \cap I$ gilt: $f(x) \leq f(x_0)$.
- **lokales Minimum von f** , wenn es eine Umgebung $U(x_0)$ gibt, so dass für alle Werte aus $U(x_0) \cap I$ gilt: $f(x) \geq f(x_0)$.

4.14. Satz (Notwendige Bedingung):

Die Funktion f sei auf dem Intervall I differenzierbar und x_0 eine innere Stelle von I .

Wenn f an der Stelle x_0 einen Extremwert hat, dann ist $f'(x_0) = 0$.

4.15. Satz (Hinreichende Bedingung):

Die Funktion f sei auf dem Intervall I zweimal differenzierbar und x_0 eine innere Stelle von I .

Gilt $f'(x_0)=0$ und $f''(x_0)>0 \Rightarrow f$ hat an der Stelle x_0 ein Minimum (lokal).

Gilt $f'(x_0)=0$ und $f''(x_0)<0 \Rightarrow f$ hat an der Stelle x_0 ein Maximum (lokal).

4.16. Definition:

Eine innere Stelle x_0 von I heißt **Wendestelle** von f , wenn im zugehörigen Punkt $W(x_0|f(x_0))$ der Graph von einer Linkskurve in eine Rechtskurve übergeht (oder umgekehrt). Ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente heißt **Sattelpunkt**.

4.17. Satz:

Sei f auf einem Intervall I dreimal differenzierbar und x_0 eine innere Stelle von I .

- Wenn x_0 eine Wendestelle von f ist, dann gilt $f''(x_0)=0$.
- Wenn $f''(x_0)=0$ und $f'''(x_0)\neq 0$, dann ist x_0 eine Wendestelle.

4.18. Satz (Regeln von de l'Hospital)

Sei $a \in \mathbb{R}$ oder $a = \pm\infty$ und gelten folgende Voraussetzungen:

(i) $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b$ und $\lim_{x \rightarrow a} v(x) = \pm b$ mit $b=0$ oder $b = \pm\infty$

(ii) $v'(x) \neq 0$ in einer Umgebung von a

(iii) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{u'(x)}{v'(x)}$ existiert

So gilt: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{u'(x)}{v'(x)}$

5. Integralrechnung

5.1. Definition:

Die Funktion f sei auf dem Intervall I stetig und $a, b \in I$. Für jedes $n \in \mathbb{N}^*$ sei S_n eine Zerlegungssumme mit $S_n = h \cdot f(x_1) + h \cdot f(x_2) + \dots + h \cdot f(x_n)$ und $h = \frac{b-a}{n}$.

Dann ist das **Integral der Funktion f** : $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_a^b f(x) dx$

5.2. Definition:

Die Funktion $f: t \rightarrow f(t)$ sei in einem Intervall I stetig und $a \in I$. Dann heißt die Funktion J_a mit

$J_a(x) = \int_a^x f(t) dt$ für $x \in I$ **Integralfunktion** von f zur unteren Grenze a .

5.3. Definition:

Gegeben sei eine auf einem Intervall I definierte Funktion f . Eine Funktion F heißt **Stammfunktion** von f im Intervall I , wenn für alle $x \in I$ gilt: $F'(x) = f(x)$.

5.4. Satz:

Ist F eine Stammfunktion von f in I , so gilt für alle weiteren Stammfunktionen G von f in I :

$G(x) = F(x) + c$, $x \in I$ mit einer Konstanten c .

5.5.

5.6. Satz (Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung):

Die Funktion f sei auf dem Intervall I stetig. Ist F eine beliebige Stammfunktion von f in I , dann gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad \text{mit } a, b \in I$$

5.7. Satz (Eigenschaften des Integrals):

Sind die Funktionen f und g auf dem Intervall I stetig und sind $a, b, c \in I$ und $r \in \mathbb{R}$, so gilt:

$$\bullet \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx = \int_a^b (f(x) + g(x)) dx \quad \text{(Summenregel)}$$

$$\bullet \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx \quad \text{(Intervalladditivität)}$$

$$\bullet \int_a^b r \cdot f(x) dx = r \cdot \int_a^b f(x) dx \quad \text{(Faktorregel)}$$

5.8. Satz (Monotonie des Integrals):

Sind die Funktionen f und g auf dem Intervall $[a; b]$ stetig und ist $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a; b]$, so

gilt:
$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

5.9. Satz:

Es sei f eine auf einem Intervall $[a; b]$ stetige Funktion. Für den Inhalt A der Fläche zwischen dem Graphen von f und der x -Achse über $[a; b]$ gilt:

$$A = \int_a^b f(x) dx, \text{ falls } f(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in [a; b] \text{ bzw. } A = -\int_a^b f(x) dx, \text{ falls } f(x) \leq 0 \text{ für alle } x \in [a; b]$$

5.10. Satz (Fläche zwischen zwei Graphen):

Für den Flächeninhalt A zwischen zwei Funktionen f und g gilt, falls $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in [a; b]$:

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

5.11. Definition:

Ist die Funktion f auf dem Intervall $I = [a; \infty)$ stetig und existiert der Grenzwert $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$, so heisst dieser Grenzwert das **uneigentliche Integral von f über $[a; \infty)$** .

5.12. Satz (Volumen Rotationskörper):

Ist die Funktion f auf dem Intervall $[a; b]$ integrierbar, so entsteht bei Rotation der Fläche zwischen dem Graphen von f und der x -Achse über $[a; b]$ ein Körper mit dem Volumen:
$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$
.

5.13. Satz (Produktintegration)

Sind u und v auf dem Intervall $I = [a; b]$ differenzierbare Funktionen mit stetigen Ableitungsfunktionen u' und v' , so gilt:
$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx$$
.

5.14. Satz (Integration durch Substitution):

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(z) dz$$

6. Exponential- und Logarithmusfunktion

6.1. Definition:

Funktionen f mit $f(x) = a^x$ oder auch g mit $g(x) = c \cdot a^x$, $c \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$ nennt man **Exponentialfunktionen zur Basis a** . Ein Vorgang, der durch eine Exponentialfunktion beschrieben werden kann, wird exponentielles Wachstum genannt. Exponentialfunktionen nennt man deshalb bei Anwendungen auch **Wachstums-** bzw. **Zerfallsfunktionen**.

6.2. Definition:

Der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ existiert und ist eine irrationale Zahl. Die Zahl heißt **eulersche Zahl** und wird mit **e** bezeichnet. Es ist $e = 2,718\ 28\dots$

6.3. Satz:

Die natürliche Exponentialfunktion f mit $f(x) = e^x$ hat die Ableitungsfunktion f' mit $f'(x) = e^x$. Eine Stammfunktion ist F mit $F(x) = e^x$.

6.4. Definition:

Die Umkehrfunktion der natürlichen Exponentialfunktion heißt **natürliche Logarithmusfunktion**. Sie wird mit $x \rightarrow \ln(x)$; $x \in \mathbb{R}^+$, bezeichnet.

6.5. Satz:

Die natürliche Logarithmusfunktion f mit $f(x) = \ln(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$, hat die Ableitungsfunktion $f'(x) = \frac{1}{x}$.

6.6. Satz:

Eine Stammfunktion der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, ist die Funktion F mit $F(x) = \ln(|x|)$.

6.7. Satz:

Eine Stammfunktion der Funktion f mit $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ ist die Funktion F mit $F(x) = \ln(|u(x)|)$.

Analytische Geometrie und Vektorrechnung

7. Vektoren:

7.1. Definition (Addition):

Sind die Koordinaten zweier Vektoren \vec{a} , \vec{b} gegeben, so gilt: $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$

7.2. Satz:

Für alle Vektoren \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} einer Ebene oder des Raumes gelten bei der Addition

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

Kommutativgesetz und

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

Assoziativgesetz.

7.3. Satz:

Für einen Vektor $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und eine reelle Zahl r gilt: $r \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot a_1 \\ r \cdot a_2 \\ r \cdot a_3 \end{pmatrix}$

7.4. Satz:

Für alle Vektoren \vec{a}, \vec{b} einer Ebene bzw. des Raumes und alle reellen Zahlen r, s gelten:

$$(r \cdot s) \cdot \vec{a} = r \cdot (s \cdot \vec{a}) \quad \text{Assoziativgesetz und}$$

$$r \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = r \cdot \vec{a} + r \cdot \vec{b}; \quad (r + s) \cdot \vec{a} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{a} \quad \text{Distributivgesetz.}$$

7.5. Definition:

Die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ heißen voneinander **linear abhängig**, wenn mindestens einer dieser Vektoren als Linearkombination der anderen Vektoren darstellbar ist.

Andernfalls heißen die Vektoren voneinander **linear unabhängig**.

7.6. Satz:

Die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ sind genau dann **linear unabhängig**, wenn die Gleichung $r_1 \cdot \vec{a}_1 + r_2 \cdot \vec{a}_2 + \dots + r_n \cdot \vec{a}_n = \vec{0}$ ($r_1, r_2, \dots, r_n \in \mathbb{R}$) genau eine Lösung mit $r_1 = r_2 = \dots = r_n = 0$ besitzt.

7.7. Satz:

Jede **Gerade** lässt sich durch eine Gleichung der Form $\vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{u}$ ($t \in \mathbb{R}$) beschreiben.

Hierbei ist \vec{p} ein Stützvektor und \vec{u} ($\vec{u} \neq \vec{0}$) ein Richtungsvektor von g .

7.8. Satz (Punkt-Richtungs-Form der Ebene):

Jede **Ebene** lässt sich durch eine Gleichung der Form $\vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$ ($r, s \in \mathbb{R}$) beschreiben.

Hierbei ist \vec{p} ein Stützvektor und die linear unabhängigen Vektoren \vec{u}, \vec{v} sind zwei Spannvektoren.

7.9. Definition:

Ist T ein Punkt der Geraden durch die Punkte A und B und gilt $\vec{AT} = t \cdot \vec{TB}$, dann nennt man die Zahl t **Teilverhältnis** des Punktes T bezüglich der Strecke \overline{AB} .

7.10. Satz:

Ist T ein Punkt einer Geraden durch zwei Punkte A und B, dann gilt:

$$\text{Aus } \vec{AT} = t \cdot \vec{TB} \text{ folgt } \vec{AT} = \frac{t}{1+t} \vec{AB} \quad (t \neq -1).$$

8. Längen, Abstände, Winkel:

8.1. Definition:

Unter dem **Betrag eines Vektors** \vec{a} versteht man die Länge der zu \vec{a} gehörenden Pfeile. Der Betrag von \vec{a} wird mit $|\vec{a}|$ bezeichnet.

8.2. Satz:

Für den **Betrag** eines Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ gilt: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

8.3. Definition:

Ist φ der Winkel zwischen den Vektoren \vec{a} und \vec{b} , so heißt $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$ das **Skalarprodukt** von \vec{a} und \vec{b} .

8.4. Satz:

Für \vec{a}, \vec{b} mit $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$ gilt: $\vec{a} \perp \vec{b}$ genau dann, wenn $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

8.5. Satz:

Koordinatenform des Skalarprodukts: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

8.6. Satz: (Eigenschaften der Skalarmultiplikation)

Für die Skalarmultiplikation der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ gilt:

- (1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ Kommutativgesetz
- (2) $r \vec{a} \cdot \vec{b} = r (\vec{a} \cdot \vec{b})$ für alle $r \in \mathbb{R}$
- (3) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ Distributivgesetz
- (4) $\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$ $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0$ genau dann, wenn $\vec{a} = \vec{0}$

8.7. Satz (Normalenform der Ebenengleichung):

Eine Ebene E mit dem Stützvektor \vec{p} und dem Normalenvektor \vec{n} wird beschrieben durch die Gleichung $\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0$.

8.8. Satz:

Ist $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = b$ eine **Koordinatengleichung** der Ebene E , so ist der Vektor mit den Koordinaten a_1, a_2, a_3 ein Normalenvektor von E .

8.9. Definition:

Zwei Geraden heißen zueinander **orthogonal**, wenn ihre Richtungsvektoren zueinander orthogonal sind. Eine **Gerade** und eine **Ebene** heißen zueinander orthogonal, wenn ein Richtungsvektor der Geraden zu den Spannvektoren der Ebene orthogonal ist

8.10. Satz:

Zwei Ebenen sind zueinander **orthogonal**, wenn ihre Normalenvektoren zueinander orthogonal sind.

8.11. Satz:

Ist $\vec{n}_0 \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0$ die **HESSE'sche Normalenform** einer Gleichung der Ebene E , so gilt für den Abstand d eines Punktes R mit dem Ortsvektor \vec{r} von der Ebene E : $d = |\vec{n}_0 \cdot (\vec{r} - \vec{p})|$

8.12. Satz:

Ist $a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3 = b$ eine Koordinatengleichung der Ebene E , so gilt für den **Abstand d** eines Punktes $R(r_1 | r_2 | r_3)$ von der Ebene E :

$$d = \left| \frac{a_1 \cdot r_1 + a_2 \cdot r_2 + a_3 \cdot r_3 - b}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \right|$$

8.13. Satz:

Sind g und h windschiefe Geraden im Raum mit $g: \vec{x} = \vec{p} + s \cdot \vec{u}$ und $h: \vec{x} = \vec{q} + t \cdot \vec{v}$ und ist \vec{n}_0 ein Einheitsvektor mit $\vec{n}_0 \perp \vec{u}$ und $\vec{n}_0 \perp \vec{v}$, dann haben g und h den Abstand: $d = |\vec{n}_0 \cdot (\vec{q} - \vec{p})|$.

8.14. Definition:

Für Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ heißt $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$ das **Vektorprodukt** von \vec{a} und \vec{b} .

8.15. Satz:

Für Vektoren \vec{a} und \vec{b} und $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ im \mathbb{R}^3 gilt:

- (1) \vec{c} ist orthogonal zu \vec{a} und \vec{b} .
- (2) \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} bilden ein „Rechtssystem“.
- (3) Der Betrag von \vec{c} ist gleich dem Flächeninhalt des von \vec{a} und \vec{b} aufgespannten Parallelogramms: $|\vec{c}|=|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\varphi)$.

8.16. Satz (Eigenschaften des Vektorprodukts):

Für Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

- (1) $\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$
- (2) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})+(\vec{a}\times\vec{c})$
- (3) $\vec{a}\times(r\vec{a})=r(\vec{a}\times\vec{b})$ für $r \in \mathbb{R}$
- (4) $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$

8.17. Satz:

Der von den Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ aufgespannte **Spat** hat das Volumen $V=|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|$.

8.18. Satz:

Schneiden sich die Geraden $g: \vec{x}=\vec{p}+t\cdot\vec{u}$ und $h: \vec{x}=\vec{q}+s\cdot\vec{v}$, dann gilt für den Schnittwinkel α :

$$\cos(\alpha)=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}.$$

8.19. Satz:

Schneiden sich die Gerade $g: \vec{x}=\vec{p}+t\cdot\vec{u}$ und die Ebene $E: \vec{n}\cdot(\vec{x}-\vec{q})=0$, dann gilt für ihren

Schnittwinkel α : $\sin(\alpha)=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}|}$ mit $(\alpha\leq 90^\circ)$

8.20. Satz:

Schneiden sich zwei Ebenen mit den Normalenvektoren \vec{n}_1 und \vec{n}_2 , dann gilt für ihren Schnittwinkel α :

$$\cos(\alpha)=\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|} \text{ mit } (\alpha\leq 90^\circ).$$

9. Kreise und Kugeln:

9.1. Satz (Vektor- und Koordinatengleichung von Kreis und Kugel):

Ein **Kreis** k wird mit dem Mittelpunkt $M(m_1|m_2)$ und dem Radius r wird beschrieben durch die Gleichung $(\vec{x}-\vec{m})^2=r^2$ bzw. $(x_1-m_1)^2+(x_2-m_2)^2=r^2$.

Eine **Kugel** K mit dem Mittelpunkt $M(m_1|m_2|m_3)$ und dem Radius r wird beschrieben durch die Gleichung $(\vec{x}-\vec{m})^2=r^2$ bzw. $(x_1-m_1)^2+(x_2-m_2)^2+(x_3-m_3)^2=r^2$.

9.2. Satz:

Die **Tangente** an den Kreis $k: (\vec{x}-\vec{m})^2=r^2$ im Punkt $B(b_1|b_2)$ mit dem Ortsvektor \vec{b} hat die Gleichung $(\vec{x}-\vec{m})\cdot(\vec{b}-\vec{m})=r^2$ bzw. $(x_1-m_1)\cdot(b_1-m_1)+(x_2-m_2)\cdot(b_2-m_2)=r^2$.

Ist der Mittelpunkt des Kreises der Ursprung, lautet die Gleichung $\vec{x}\cdot\vec{b}=r^2$ bzw. $x_1\cdot b_1+x_2\cdot b_2=r^2$.

9.3. Satz:

Die **Polare** an den Kreis $k: (\vec{x}-\vec{m})^2=r^2$ zum Punkt $P(p_1|p_2)$ mit dem Ortsvektor \vec{p} hat die Gleichung $(\vec{x}-\vec{m})\cdot(\vec{p}-\vec{m})=r^2$.

9.4. Satz:

Schneidet eine Ebene E eine Kugel K mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r, dann ist der Mittelpunkt M' des Schnittkreises Lotfußpunkt von M auf E. Für den Radius r' des Schnittkreises gilt:

$$r' = \sqrt{(r^2 - d^2)} \quad \text{mit} \quad d = \overline{MM'}$$

9.5. Satz:

Die Tangentialebene an die Kugel K: $(\vec{x} - \vec{m})^2 = r^2$ im Punkt B($b_1|b_2|b_3$) mit dem Ortsvektor \vec{b} hat die Gleichung $(\vec{x} - \vec{m}) \cdot (\vec{b} - \vec{m}) = r^2$ bzw. $(x_1 - m_1)(b_1 - m_1) + (x_2 - m_2)(b_2 - m_2) + (x_3 - m_3)(b_3 - m_3) = r^2$.

Ist der Mittelpunkt der Kugel der Ursprung, so lautet die Gleichung $\vec{x} \cdot \vec{b} = r^2$ bzw.

$$x_1 b_1 + x_2 b_2 + x_3 b_3 = r^2$$

Stochastik

10. Wahrscheinlichkeiten

10.1. Definition:

Ein Zufallsexperiment habe die Ergebnismenge $S = \{e_1; e_2; \dots; e_k\}$. Dann nennt man jede Teilmenge A von S ein zu diesem Zufallsexperiment gehörendes **Ereignis**. Endet die Durchführung des Zufallsexperimentes mit einem Ergebnis aus A, so ist das Ereignis A **eingetreten**.

10.2. Definition:

Ist ein Ereignis A bei n Durchführungen eines Zufallsexperimentes H-mal eingetreten, so nennt man

H seine **absolute** und $\frac{H}{n}$ seine **relative Häufigkeit** h.

$$h(A) = \frac{H}{n}$$

10.3. Empirisches Gesetz der großen Zahlen:

Nach einer hinreichend großen Anzahl n von Durchführungen eines Zufallsexperimentes stabilisieren sich die relativen Häufigkeiten h(A) eines Ereignisses A.

10.4. Definition:

Ist jedem der Ereignisse eines Zufallsexperimentes mit $S = \{e_1; e_2; \dots; e_k\}$ eine reelle Zahl $P(e_i)$ so zugeordnet, dass

$$(1) 0 \leq P(e_i) \quad \text{für alle } i$$

$$(2) P(e_1) + P(e_2) + \dots + P(e_k) = 1$$

gilt, dann heißen die Zahlen $P(e_i)$ **Wahrscheinlichkeiten**.

Eine Funktion P, die jedem Ereignis eines Zufallsexperimentes eine Wahrscheinlichkeit zuordnet, heißt **Wahrscheinlichkeitsfunktion (Wahrscheinlichkeitsverteilung)**.

Ist $A = \{a_1; a_2; \dots; a_r\}$ mit $a_i \in S$ für alle i ein Ereignis, dann ist

$$(3) P(A) = P(a_1) + P(a_2) + \dots + P(a_r)$$

die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A. Für das unmögliche Ereignis setzt man $P(\emptyset) = 0$.

10.1. Satz:

Für ein Ereignis A und sein **Gegenereignis** \bar{A} gilt: $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

10.2. Definition:

Wenn für alle Ergebnisse eines Zufallsexperiments gleiche Wahrscheinlichkeiten angenommen werden können (Gleichverteilung), dann heißt das Zufallsexperiment ein **Laplace-Experiment**.

10.3. Satz:

Wenn die Wahrscheinlichkeitsverteilung eine Gleichverteilung ist, so gilt für die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ eines Ereignisses A :

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der Ergebnisse, bei denen } A \text{ eintritt}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}} .$$

10.4. Definition (Pfadregel):

Im Baumdiagramm ist die Wahrscheinlichkeit eines Pfades gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten auf den Teilstrecken des Pfades.

11. Berechnen von Wahrscheinlichkeiten mit Abzählverfahren

11.1. Satz(Produktregel):

Aus k nichtleeren Mengen $M_1 + \dots + M_k$ mit $n_1 + \dots + n_k$ Elementen kann man $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$ verschiedene k -Tupel $(x_1; \dots; x_k)$ bilden mit $x_1 \in M_1, \dots, x_k \in M_k$.

11.2. Satz:

Einer Gesamtheit von n verschiedenen Elementen kann man n^k **geordnete Stichproben mit Zurücklegen** vom Umfang k entnehmen.

11.3. Satz:

Einer Gesamtheit von n verschiedenen Elementen kann man $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$ **geordnete Stichproben ohne Zurücklegen** vom Umfang k (für $k \leq n$) entnehmen.

11.4. Satz:

Eine Menge von n verschiedenen Elementen hat $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n = n!$ **Permutationen**.

11.5. Satz:

Einer Gesamtheit von n verschiedenen Elementen kann man $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

ungeordnete Stichproben ohne Zurücklegen vom Umfang k (für $k \leq n$) entnehmen.

11.6. Satz:

In einer Urne befinden sich N Kugeln, von denen M schwarz und $N-M$ weiß sind. Es werden n Kugeln **ohne Zurücklegen** gezogen. Beschreibt die Zufallsvariable X die Anzahl der schwarzen unter den n gezogenen Kugeln, so gilt:

$$P(X=k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad \text{für } k=0, 1, \dots, n. \quad (M \leq N; n \leq N)$$

11.7. Satz (Symmetriegesetz):

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

11.8. Satz (Additionsformel):

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

12. Additionssatz und Multiplikationssatz

12.1. Satz (Additionssatz):

Für zwei beliebige Ereignisse A, B gilt: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

12.2. Definition:

Sind A, B zwei beliebige Ereignisse mit $P(A) \neq 0$, so bezeichnet $P_A(B)$ die **durch A bedingte Wahrscheinlichkeit von B** ; d.h. es ist $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

12.3. Satz (Allgemeiner Multiplikationssatz für zwei Ereignisse):

Ist $P(A) \neq 0$, so gilt: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$.

12.4. Satz (Allgemeiner Multiplikationssatz für mehr als zwei Ereignisse):

Für Ereignisse A_1, \dots, A_n mit $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$ gilt:

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \cdot \dots \cdot P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

12.5. Definition:

Ereignisse A und B mit positiven Wahrscheinlichkeiten nennt man voneinander **unabhängig**, wenn gilt: $P_A(B) = P(B)$ (und damit auch $P_B(A) = P(A)$); andernfalls heißen A und B voneinander **abhängig**. Zwei Ereignisse von denen mindestens eines die Wahrscheinlichkeit 0 hat, sind unabhängig.

12.6. Definition 2:

n Ereignisse heißen voneinander **unabhängig**, wenn sie paarweise unabhängig sind, und außerdem jedes der Ereignisse von allen Schnitten unabhängig ist, die man aus den übrigen Ereignissen bilden kann.

12.7. Satz (Spezieller Multiplikationssatz für zwei Ereignisse)

Zwei Ereignisse A und B sind genau dann unabhängig, wenn gilt:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

12.8. Satz:

Sind die Ereignisse A und B voneinander unabhängig, so sind auch A und \bar{B} , \bar{A} und B bzw. \bar{A} und \bar{B} voneinander unabhängig.

12.9. Satz: (Spezieller Multiplikationssatz für mehr als zwei Ereignisse)

Sind n Ereignisse A_1, \dots, A_n unabhängig, so gilt: $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot \dots \cdot P(A_n)$.

12.10. Satz 1:

Ist $P(A) \neq 0$ und $P(\bar{A}) \neq 0$, so gilt für ein beliebiges Ereignis B $P(B) = P(A) \cdot P_A(B) + P(\bar{A}) \cdot P_{\bar{A}}(B)$

12.11. Satz 2: (Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit)

Wird die Ergebnismenge S in die Ereignisse A_1, \dots, A_n zerlegt und ist $P(A_i) \neq 0$ für $i=1; \dots; n$, so gilt für ein beliebiges Ereignis B : $P(B) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(B) + \dots + P(A_n) \cdot P_{A_n}(B)$

12.12. Satz: Sind A, B Ereignisse mit $P(A) \neq 0$ und $P(B) \neq 0$, so gilt:

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P_A(B)}{P(A) \cdot P_A(B) + P(\bar{A}) \cdot P_{\bar{A}}(B)}$$

12.13. Satz: (Satz von Bayes)

A_1, \dots, A_n Seien Ereignisse, die eine Zerlegung von S bilden und positive Wahrscheinlichkeiten haben. Ist dann B ein beliebiges Ereignis mit $P(B) \neq 0$ und A_i eines der Ereignisse A_1, \dots, A_n so gilt:

$$P_B(A_i) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i) \cdot P_{A_i}(B)}{P(A_1) \cdot P_{A_1}(B) + \dots + P(A_n) \cdot P_{A_n}(B)}$$

13. Zufallsvariablen und ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung

13.1. Definition:

Eine Abbildung $x: S \rightarrow \mathbb{R}$, die jedem Ergebnis eines Zufallsexperimentes eine reelle Zahl zuordnet, heißt Zufallsvariable.

13.2. Definition:

Über die Ergebnismenge S eines Zufallsexperimentes mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung P sei eine Zufallsvariable X definiert, welche die Werte $x_i (i=1; \dots; n)$ annehmen kann. Dann heißt die Funktion $x_i \rightarrow P(X=x_i)$ Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X.

13.3. Definition:

Ist X eine Zufallsvariable, welche die Werte x_1, \dots, x_n annehmen kann, so heißt die reelle Zahl $E(x)$ mit $E(x) = x_1 \cdot P(X=x_1) + \dots + x_n \cdot P(X=x_n)$ Erwartungswert der Zufallsvariablen X.

13.4. Definition:

Ist X eine Zufallsvariable, welche die Werte x_1, \dots, x_n annehmen kann und den Erwartungswert μ hat, so heißt die reelle Zahl $V(X)$ mit

$$\sigma^2 = V(X) = (x_1 - \mu)^2 \cdot P(X=x_1) + \dots + (x_n - \mu)^2 \cdot P(X=x_n)$$
 die Varianz der Zufallsvariablen X.

$\sigma = \sqrt{V(X)}$ Heißt Standardabweichung von X.

14. Spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen

14.1. Definition:

Ein Zufallsexperiment heißt **Bernoulli-Experiment**, wenn es nur zwei Ergebnisse hat. Eine Zufallsvariable, die bei einem der Ergebnisse den Wert 1 („Treffer“), beim anderen den Wert 0 („Niete“) annimmt, heißt **Bernoulli-Variable**. Die Wahrscheinlichkeit für Treffer wird mit p, für Niete mit $q=1-p$ bezeichnet.

14.2. Definiton:

Ein Zufallsexperiment, das aus n unabhängigen Durchführungen desselben Bernoulli-Experiments besteht, heißt **Bernoulli-Kette** der Länge n.

14.3. Satz:(Formel von Bernoulli)

Ein Bernoulli-Experiment mit der Wahrscheinlichkeit p für Treffer werde n-mal durchgeführt. Die Durchführungen seien unabhängig. X sei Zufallsvariable für die Anzahl der Treffer in dieser Bernoulli-Kette. Dann beträgt die Wahrscheinlichkeit für genau k-Treffer ($k=0,1,\dots,n$) $P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

14.4. Definition:

X sei eine Zufallsvariable, welche die Werte $0;1;\dots;n$ annehmen kann. Dann nennt man eine Wahrscheinlichkeitsverteilung von X der Form $k \rightarrow \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ eine Binominalverteilung mit den Parametern n und p. Für die Wahrscheinlichkeit $P(X=k)$ schreibt man auch $B_{n;p}(k)$. Eine Zufallsvariable X mit dieser Wahrscheinlichkeitsverteilung nennt man kurz eine $B_{n;p}$ -verteilte Zufallsvariable.

14.5. Satz:

Für den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung einer $B_{n;p}$ -verteilten Zufallsvariablen X gilt:

$$E(X) = n \cdot p \quad V(X) = n \cdot p \cdot q \quad \delta_x = \sqrt{n \cdot p \cdot q} \quad \text{mit } q = 1-p$$

14.6. Satz (Näherungsformel von De Moivre-LaPlace)

Für eine $B_{n;p}$ -verteilte Zufallsvariable X gilt bei großen Werten von n :

$$P(k_1 \leq X \leq k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) \quad \text{mit } x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}; x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} \quad (\text{ohne Korrekturglied}) \text{ bzw.}$$
$$x_1 = \frac{k_1 - 0,5 - np}{\sqrt{npq}}; x_2 = \frac{k_2 + 0,5 - np}{\sqrt{npq}} \quad (\text{mit Korrekturglied}).$$

Die Näherungsformel liefert brauchbare Werte, wenn die Faustformel $npq > 9$ erfüllt ist.

14.7. Definition:

Gilt bei einer Zufallsvariable X für gewisse Zahlen μ, σ $P(X \leq x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$ für alle $x \in \mathbb{R}$,

so sagt man, X sei **normalverteilt** bzw. X besitze eine **Normalverteilung** mit den Parametern μ und σ , kurz: X sei $N(\mu; \sigma)$ -verteilt.

15. Testen von Hypothesen

15.1. Signifikanz bei große Stichprobenumfang

Ist für eine Binomialverteilung bei sehr großen Werten (z.B. $n > 100$) die Bedingung $n \cdot p \cdot (1-p) > 9$ erfüllt, kann man bei einem Signifikanztest den Ablehnungsbereich näherungsweise mit Hilfe der dazugehörigen Normalverteilung ermitteln.

16. Schätzen von Parametern

16.1. Vertrauensintervall für p zur Vertrauenswahrscheinlichkeit γ

Bei einem Zufallsexperiment trete ein Ergebnis oder allgemein ein Ereignis mit der unbekanntem Wahrscheinlichkeit p ein. Wird das Experiment n -mal durchgeführt und beschreibt X die Anzahl der Versuche, bei denen das Ereignis eingetreten ist, so ist X binomialverteilt mit den Parametern n und p . Die Wahrscheinlichkeit, dass die relative Häufigkeit $\frac{X}{n}$ im Intervall der Länge $2c \sqrt{\left(\frac{p(1-p)}{n}\right)}$ um p liegt, ist etwa γ .

1. Berechnen von c : $\Phi(c) \geq \frac{(1+\gamma)}{2}$

2. Berechnen der Koeffizienten a, b, c' :

$$a = n + c^2$$
$$b = -2X - c^2$$
$$c' = \frac{x^2}{n}$$

3. Lösen der quadratischen Gleichung: $p_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{-b^2 - 4ac'}}{2a}$

4. Vertrauensintervall: $[p_1; p_2]$