Rheinland-Pfalz

Lehrplan Mathematik

Grund- und Leistungsfach
Jahrgangsstufen 11 bis 13
der gymnasialen Oberstufe
(Mainzer Studienstufe)

Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Weiterbildung

Erarbeitet im Auftrag des Ministeriums für Bildung, Wissenschaft und Weiterbildung
Rheinland-Pfalz

Mitglieder der Fachdidaktischen Kommission:

Christel Eger, Gymnasium am Römerkastell, Alzey

Barbara Mathea, Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Weiterbildung, Mainz (Leiterin)

Klaus Merkert, Bertha-von-Suttner Integrierte Gesamtschule, Kaiserslautern,
Hohenstaufen-Gymnasium, Kaiserslautern

Ferdinand Weber, Staatl. Studienseminar für das Lehramt an Gymnasien, Mainz

Georg Wiederstein, Gymnasium im Kannenbäckerland, Höhr-Grenzhausen

Vertreterin des Pädagogischen Zentrums:
Angela Euteneuer, Pädagogisches Zentrum, Bad Kreuznach

Vorwort

Die Lehrplanrevision für die gymnasiale Oberstufe orientierte sich an der Frage, welche Bedeutung die Begriffe allgemeine Hochschulreife und allgemeine Studierfähigkeit mit Blick auf die aktuellen und künftigen gesellschaftlichen Anforderungen heute haben und wie sie inhaltlich gefüllt werden können. Dabei sind beispielsweise veränderte außerschulische Rahmenbedingungen und Anforderungen ebenso zu berücksichtigen wie fachwissenschaftliche und fachdidaktische Weiterentwicklungen und der Einfluß der neuen Informations- und Kommunikationstechnologien. Darüber hinaus soll der Bedeutung von wissenschaftspropädeutischem Arbeiten, selbständigem Lernen und vernetztem Denken für die allgemeine Studierfähigkeit Rechnung getragen werden.

Zur allgemeinen Hochschulreife und Studierfähigkeit gehört heute einerseits der Aufbau eines breiten, gut organisierten und in Anwendungssituationen erprobten Fundaments an Wissen und Fähigkeiten und andererseits der Erwerb von Lernstrategien und Kompetenzen, die ein selbständiges Weiterlernen ermöglichen. Eine solide, gut organisierte Wissensbasis in unterschiedlichen Fachbereichen ist Voraussetzung sowohl für den systematischen, kumulativen Kompetenzerwerb innerhalb der Fächer als auch für vernetztes Denken und Problemlösen über die Fächergrenzen hinaus.

Die vorliegenden Lehrpläne versuchen, diesen Anforderungen Rechnung zu tragen, indem sie Bewährtes fortführen und gleichzeitig deutliche neue Akzente setzen. Den Fachlehrerinnen und -lehrern werden mehr Entscheidungspielräume als bisher eingeräumt, sowohl bezüglich der Stoffabfolge als auch bezüglich des Stoffumfangs und der Auswahl der Inhalte. Die Themen sind in der Regel nicht Halbjahresabschnitten zugeordnet, sondern die gymnasiale Oberstufe wird als inhaltliche Einheit gesehen. Wahlpflichtthemen regen schulinterne oder lerngruppenbezogene Schwerpunktbildungen an.

Fachübergreifendes Arbeiten gehört grundsätzlich zum Unterricht in der gymnasialen Oberstufe. Daher enthält jeder Fachlehrplan ein gesondertes Kapitel zum fachübergreifenden und fächerverbindenden Lernen, das auch Organisationsmodelle und konkrete Themenvorschläge umfaßt.

Die jetzt vorliegenden Lehrpläne bauen auf den Lehrplanentwürfen auf und berücksichtigen die Ergebnisse der breit angelegten Anhörung sowie die Anregungen aus vielen Veranstaltungen mit Fachlehrerinnen und -lehrern.

Ich danke den Fachdidaktischen Kommissionen für ihr außergewöhnliches Engagement und ihre qualifizierte Arbeit und hoffe, daß sie die Umsetzung der Lehrpläne mit ihren Überlegungen und Erfahrungen noch ein Stück weit begleiten können.

(Prof. Dr. E. Jürgen Zöllner)

Inhaltsverzeichnis

Fachdidaktische Konzeption

1. Aufgaben und Ziele des Mathematikunterrichts in der gymnasialen Oberstufe

Der Unterricht in der gymnasialen Oberstufe soll die Schülerinnen und Schüler zur allgemeinen Studierfähigkeit führen, ihnen eine berufliche Orientierung ermöglichen und zur Entwicklung ihrer Persönlichkeit in sozialer Verantwortung beitragen. Dazu ist der Erwerb fachlicher, methodischer und sozialer Kompetenzen erforderlich. Der Mathematikunterricht leistet zum Erwerb dieser Kompetenzen einen wesentlichen Beitrag. Die Aufgaben und Ziele des Mathematikunterrichts in der gymnasialen Oberstufe lassen sich auf die folgenden drei Schwerpunkte konzentrieren. Sie erfahren im Grundfach und im Leistungsfach eine unterschiedliche Gewichtung (vgl. Seite 13).

1.1 Mathematik im Anwendungszusammenhang

Die Mathematik war in ihrer historischen Entwicklung, ausgehend von praktischen Notwendigkeiten des Zählens und Messens, von Anfang an eingebunden in das Bemühen der Menschen, Vorgänge und Zusammenhänge in der sie umgebenden Welt zu verstehen und zu beeinflussen. Mit der Entwicklung der Naturwissenschaften und der Technik ist sie untrennbar verbunden; die großen Leistungen auf diesen Gebieten sind ohne Mathematik nicht denkbar. Heute durchdringen mathematisches Denken und mathematische Methoden auch weite Bereiche der Sozial- und Gesellschaftswissenschaften, der Humanwissenschaften sowie des ökologischen und wirtschaftlichen Planens und Handelns.

Im Mathematikunterricht soll in vielfältiger Weise die Anwendungsrelevanz von fachspezifischen Kenntnissen und Fähigkeiten erfahren werden. Mit Blick auf die allgemeine Studierfähigkeit ist wichtig, dass die Bedeutung der Mathematik als Hilfswissenschaft in einer zunehmenden Zahl anderer Wissenschaftsgebiete bewusst gemacht wird. Der Mathematikunterricht muss aber auch aufzeigen, dass und in welcher Weise Mathematik einen entscheidenden Beitrag zur Berufsvorbereitung leistet.
Eine weitere Aufgabe des Mathematikunterrichts ist es, Schülerinnen und Schülern den Prozess des Mathematisierens nahe zu bringen. Wo sich mathematische Mittel anbieten, ein Sachproblem zu strukturieren, wesentliche Aspekte eines komplexen Sachverhalts in einem Modell darzustellen und eine Lösung zu suchen, können Wechselbeziehungen zwischen Theorie und Praxis erfahren werden. Durch die Beschäftigung mit der historischen Entwicklung der Mathematik wird deren geistesgeschichtliche Bedeutung als Kulturgut deutlich und die wechselseitige Befruchtung von reiner Wissenschaft und Anwendungen erfahren.

Die Schülerinnen und Schüler müssen als Grundlage für Anwendungen über die erforderlichen mathematischen Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten verfügen. Dies umfasst auch, dass sie geometrische, grafische, numerische und algebraische Hilfsmittel sachgerecht einsetzen. Sie sollen Beziehungen zwischen einem außermathematischen Sachverhalt und der Mathematik herstellen, das Problem mit mathematischen Mitteln bearbeiten, gefundene Lösungen interpretieren und kritisch beurteilen. Dabei sollten auch Grenzen der fachspezifischen Verfahren und Grenzen der Mathematisierung erkannt werden.

Weil die Anwendungen von Mathematik für den Unterricht von zentraler Bedeutung sind, ist dem “Problemlösen mit mathematischen Methoden – Modellbildung” im Lehrplan ein eigenes Kapitel gewidmet (vgl. Seite 18).

1.2 Mathematik als Wissenschaft

Die Mathematik beschäftigt sich mit Gegenständen und Sachverhalten, die Produkte des menschlichen Geistes sind. Durch formales Operieren mit abstrakten Begriffen und Beziehungen gelangt man mit Hilfe der Logik zu folgerichtigen Aussagen. Die Auseinandersetzung mit Mathematik gewährt einen Einblick in deduktiv geordnete Strukturen und lässt Methoden wissenschaftlichen Arbeitens erfahren.

Der Mathematikunterricht soll zu exaktem Denken anleiten und rationale, objektive Betrachtungsweisen bewusst machen. Im Sinne einer Wissenschaftspropädeutik soll ein Einblick in den strukturellen Aufbau und die grundlegenden Methoden der Mathematik gewonnen werden. Das Einbeziehen von historischen Betrachtungen, in denen das Ringen um exakte Begriffsbildungen, um abgesicherte Grundlagen und um lückenlose Beweise in der Geschichte der Mathematik erfahrbar wird, weitet den Blick für die kulturelle Bedeutung dieser Wissenschaft. Das Beschäftigen mit Mathematik soll aber auch als Tätigkeit erfahren werden, die um ihrer selbst willen betrieben wird und Freude bereiten kann.

Die Schülerinnen und Schüler müssen als Grundlage für den Aufbau der Schulmathematik die notwendigen Begriffe und Aussagen kennen und sachgerecht verwenden. Sie sollen die mathematische Fachsprache verstehen und anwenden, deren Zweckmäßigkeit für die Beschreibung mathematischer Sachverhalte erkennen und ferner erfahren, dass die Benutzung exakt definierter Fachbegriffe die Kommunikation erleichtert und Missverständnisse vermeiden hilft.
Um einen Einblick in die Mathematik als Wissenschaft zu gewinnen, ist es notwendig, dass die Schülerinnen und Schüler

- erkennen, auf welche Weise mathematische Begriffe gewonnen und in Definitionen präzise beschrieben werden.
- Beweise verstehen, nachvollziehen und in einfachen Fällen auch selbständig erstellen. Dabei sollen sie auch lernen, folgerichtig und lückenlos zu argumentieren. Im Vergleich mit anderen Fächern kann hinterfragt werden, unter welchen Bedingungen eine Aussage jeweils als gültig anerkannt wird.
- Leitgedanken und Leitlinien der Mathematik (z.B. Funktion und Abbildung, Algorithmus, Approximation) in verschiedenen Zusammenhängen erkennen. Auch hier sind historische Rückblicke zu empfehlen.
- an Beispielen einen Einblick in den strukturellen Aufbau der Mathematik gewinnen. Dies lässt sich z.B. erreichen durch das “lokale Ordnen” von Definitionen und Sätzen zu einem deduktiven Gefüge in überschaubarem Rahmen.

1.3 Ausbildung allgemeiner geistiger Fähigkeiten und Entwicklung von Persönlichkeitsmerkmalen

Die Mathematik hat in ihrer mehrtausendjährigen Geschichte Denken und Handeln der Menschen nachhaltig beeinflusst. In der Wechselwirkung zwischen reiner und angewandter Mathematik entfaltet sich das Streben des menschlichen Geistes, einerseits Probleme aus der ihn umgebenden Welt zu erfassen und zu lösen, andererseits zweckfrei abstrakte Zusammenhänge zu erkunden und allgemeine Strukturen zu entdecken. Die geistige Herausforderung, die die Beschäftigung mit Mathematik begleitet, kann eine Schulung des Denkens bewirken.

Der Mathematikunterricht hat auch die Aufgabe, allgemeine geistige Fähigkeiten, die über das Fach hinausführen, zu entwickeln und zu fördern. Die in Anwendungsbezügen genutzten Strategien (z.B. heuristische Verfahren) sollen so weit bewusst gemacht und verinnerlicht werden, dass sie auf das Verhalten in allgemeinen Problemlösesituationen übertragen werden können. Mathematische Denkleistungen im Unterricht (z.B. folgerichtiges Argumentieren, Orientierung an einmal getroffenen Festlegungen) sollen sich auf die allgemeine Praxis des Denkens positiv auswirken. Dieser Transfer stellt sich aber nicht zwingend und nicht von selbst ein. Entscheidend für einen möglichen Transfer ist, dass er bewusst angestrebt und durch geeignete unterrichtliche Maßnahmen unterstützt und gefördert wird (vgl. “Unterrichtsgestaltung und Unterrichtsmethoden”, Seite 11).

Die Schülerinnen und Schüler sollen durch den Mathematikunterricht unterstützt werden, allgemeine geistige Fähigkeiten zu entwickeln, zu erweitern oder zu vertiefen. Hierzu gehören vor allem allgemeine Strategien des Problemlösens, die auch in außermathematischen Situationen angewendet werden können. Ferner sollen Anschauungsvermögen, Abstraktionsvermögen, logisches Denken und sachliches Argumentieren gefördert werden. In diesem Zusammenhang kann der Mathematikunterricht auch einen wichtigen Beitrag zur allgemeinen Spracherziehung der Schülerinnen und Schüler leisten. Mündliche Äußerungen und Referate, schriftliche Ausarbeitungen, mathematische “Aufsätze” und Facharbeiten tragen zur Verbesserung der sprachlichen Kompetenz bei.

Möglichkeiten der **Persönlichkeitsbildung** zu schaffen, ist schließlich auch Aufgabe und Ziel des Mathematikunterrichts. Durch die Beschäftigung mit Mathematik können z.B. Konzentrationsfähigkeit und Beharrlichkeit, Sachlichkeit, Kreativität und Selbständigkeit gefördert werden. Durch das gemeinsame Suchen und Bemühen um die Lösung eines mathematischen Problems in der Gruppe können die Schülerinnen und Schüler Qualifikationen wie Kommunikationsfähigkeit, Kooperationsbereitschaft, intellektuelle Redlichkeit, Bescheidenheit, kritische Einstellung gegenüber der eigenen Leistung erwerben. Die Entwicklung solcher Persönlichkeitsmerkmale wird aber nur erreicht, wenn der Lernprozess entsprechend organisiert, der Unterricht geeignet geplant und gestaltet ist. Deshalb wird auf diese Ziele des Mathematikunterrichts im Abschnitt “Unterrichtsgestaltung und Unterrichtsmethoden” noch einmal eingegangen.

2. Das Fach Mathematik im fachübergreifenden Kontext

Damit das Fach Mathematik seinen Beitrag zum Bildungsauftrag des Gymnasiums voll entfalten kann, darf es mit seinen Zielen und Inhalten im Fächerkanon nicht isoliert gesehen werden. Dieser Anspruch erwächst vor allem aus zwei Feststellungen.

Zum einen steht die Mathematik in vielfältigen Wechselbeziehungen zu anderen Wissenschaften. Dies muss auch im Mathematikunterricht der gymnasialen Oberstufe erfahrbar werden, und zwar sowohl in seiner fachspezifischen Gestaltung als auch in fächerverbindenden Unterrichtsvorhaben. Um den weitreichenden Anwendungsbezug der Mathematik deutlich werden zu lassen, müssen, wo immer dies möglich ist, Querverbindungen zu anderen Wissensgebieten aufgezeigt werden. Die Anwendungsbeispiele zu mathematischen Themen sollen sich an Sachverhalten orientieren, die den Schülerinnen und Schülern aus anderen Fächern bekannt sind. In diesem Zusammenhang spielt auch die mathematische Modellbildung als Methode zur Lösung von Anwendungsproblemen eine wichtige Rolle. Auf welche Weise sie im Mathematikunterricht der gymnasialen Oberstufe entwickelt und trainiert wird, ist im Kapitel “Problemlösen mit mathematischen Methoden – Modellbildung” (Seite 18) dargestellt.

Zum anderen erfordern die komplexen Strukturen und Vernetzungen in allen Bereichen von Gesellschaft, Wissenschaft und Technik in zunehmendem Maß ein Denken in übergreifenden Zusammenhängen. Schülerinnen und Schülern müssen im Unterricht immer wieder ganzheitliche Erfahrungen ermöglicht werden, weil sie mehr als rein fachimmanente Arbeitsweisen der Realität entsprechen. Indem auch an den Mathematikunterricht der Anspruch gestellt wird, zur Bewältigung von Lebenssituationen beizutragen, darf er nicht vorrangig auf eine Anhäufung von isoliertem Einzelwissen abzielen, sondern muss Einsichten in Zusammenhänge entstehen lassen. Darüber hinaus müssen mathematische Begriffe und Verfahren, die in anderen Fächern benötigt werden, bereitgestellt werden.

Ein sich an realen Lebenssituationen orientierender Mathematikunterricht schließt selbstverständlich auch die Nutzung neuer Medien und Technologien ein (vgl. “Computer im Mathematikunterricht”, Seite 16). Der Umgang mit algorithmischen Verfahren, mit fachübergreifend einsetzbarer Software und mit neuen Informations- und Kommunikationstechniken verdeutlicht den Schülerinnen und Schülern, wie diese Werkzeuge und Hilfsmittel in den verschiedensten Bereichen zur Problemlösung eingesetzt werden können, welcher Nutzen daraus zu ziehen ist und welche Gefahren unter Umständen damit verbunden sind. Dadurch werden über die fachlichen Grenzen hinaus Fragen nach Sinn und Verantwortbarkeit wirtschaftlich-technisch bestimmten Handelns aufgeworfen.

Wie die Bedeutung des Fachs Mathematik im fachübergreifenden Kontext für die Schülerinnen und Schüler in entsprechenden Unterrichtseinheiten konkret erfahrbar werden kann, ist im Kapitel “Fachübergreifendes und fächerverbindendes Lernen” (Seite 72) exemplarisch dargestellt.

3. Unterrichtsgestaltung und Unterrichtsmethoden

Die in den vorangegangenen Abschnitten beschriebenen Aufgaben des Mathematikunterrichts werden nicht erfüllt, wenn Kenntnisse und Fertigkeiten ausschließlich in einer an der Fachsystematik orientierten Abfolge dargeboten und von den Schülerinnen und Schülern rezipiert werden. Ob die anzustrebenden Ziele erreicht werden oder nicht, hängt entscheidend von der Gestaltung des Unterrichts und von den Unterrichtsmethoden ab.

Problemorientierung und **entdeckendes Lernen** sind grundlegende Prinzipien der Unterrichtsgestaltung. Die Schülerinnen und Schüler sollen angeregt werden zum Probieren, Vermuten, Entdecken, Argumentieren, Begründen; sie sollen lernen, Fragen und Lösungsstrategien zu entwickeln und zu formulieren. Dazu müssen immer wieder Anlässe geschaffen werden, über eine Sache zu sprechen. Deshalb ist es notwendig, dass im Mittelpunkt eines Lernprozesses ein Problem (Sachproblem oder innermathematische Fragestellung) steht, das die Schülerinnen und Schüler motiviert, sich mit dem Gegenstand auseinanderzusetzen und Antworten oder Lösungen zu suchen.

Selbständigkeit und **Selbsttätigkeit** der Schülerinnen und Schüler können darüber hinaus dazu beitragen, dass Mathematikunterricht erfolgreich ist. Wenn die aktive Auseinandersetzung der Schülerinnen und Schüler mit Problemsituationen Ausgangspunkt für das Erschließen mathematischer Aussagen, Verfahren und Methoden ist, werden der Verstehensprozess erleichtert, tiefere Einsichten gewonnen und Freude am Fach geweckt. Formen offenen Unterrichts können die Fähigkeit, selbständig Lernprozesse zu organisieren oder an der Organisation von Lernprozessen zu partizipieren, fördern.

Die **Sozialkompetenz** der Schülerinnen und Schüler wird vor allem durch Partner-, Gruppen- und Teamarbeit gestärkt. Das gemeinsame Anpacken neuer Probleme, das Ringen in der Gruppe um geeignete Lösungswege, die Notwendigkeit, andere mit ihren Meinungen ernst zu nehmen und das Bewusstsein, gemeinsam ein Problem bewältigt zu haben, wirken sich positiv auf das Sozialverhalten der Lernenden aus; diese Erfahrungen fördern Kommunikationsfähigkeit, Teamfähigkeit und Kooperationsbereitschaft.

Unterrichtsmedien, sinnvoll eingesetzt, können den Mathematikunterricht bereichern und den Lernprozess unterstützen. Sie ergänzen das Lehrbuch, dienen der Motivation und Veranschaulichung, erweitern die Möglichkeit der Selbsttätigkeit und der Gruppenarbeit, entlasten von sinnleerem Kalkül und öffnen Wege zu anwendungsorientiertem, fachübergreifendem Unterricht. Zu den Unterrichtsmedien gehören z.B. Tabellen, Formelsammlungen und Handbücher, Zeitungen und Zeitschriften, statistische Datensammlungen, Quellentexte und Materialien aus der Arbeitswelt. Den vielseitigen Möglichkeiten, Computer und Taschenrechner im Unterricht einzusetzen, ist in diesem Lehrplan ein eigenes Kapitel gewidmet (vgl. Seite 16). Die Lehrerinnen und Lehrer sollen darüber hinaus Angebote nutzen, neue Informations- und Kommunikationstechniken im Mathematikunterricht zu erproben.

Regelmäßige **Übungen und Wiederholungen** im Unterricht und in den Hausaufgaben sind zur Festigung von Kenntnissen, zum sicheren und schnellen Vollzug von Fertigkeiten und zum Anwenden erworbener Fähigkeiten unabdingbar. Bei der Bearbeitung der Übungen ist ein hohes Maß an Selbständigkeit zu fordern. Die Hausaufgaben beschränken sich nicht mehr nur auf das Lösen einzelner Übungen. Umfangreichere oder komplexere Aufgabenstellungen, deren Bearbeitung sich über einen längeren Zeitraum erstrecken und auch in Gruppen erfolgen kann, stellen eine Vorbereitung auf selbständiges wissenschaftliches Arbeiten dar.

4. Ziele und Methoden in Grund- und Leistungsfach

Sowohl im Grundfach als auch im Leistungsfach soll entsprechend den eingangs beschriebenen “Aufgaben und Zielen des Mathematikunterrichts” eine mathematische Grundbildung erworben werden, die die allgemeine Studierfähigkeit sicherstellt bzw. für weiterführende Ausbildungsgänge vorausgesetzt wird. Die damit verbundene Sach- und Methodenkompetenz wird allen Schülerinnen und Schülern u.a. dadurch vermittelt, dass im Grundfach und im Leistungsfach die gleichen Themenbereiche (Analysis, Stochastik, Lineare Algebra/Analytische Geometrie) angesprochen werden und die gleichen allgemeinen Zielsetzungen und Unterrichtsprinzipien gelten.

Grundfach und Leistungsfach unterscheiden sich jedoch in ihren jeweiligen Schwerpunktsetzungen; die folgenden Aspekte machen dies deutlich.

* Im *Grundfach* soll den Schülerinnen und Schülern vor allem die Anwendungsrelevanz des Fachs Mathematik verdeutlicht werden. Daran orientiert sich die Auswahl der zu vermittelnden mathematischen Kenntnisse und Methoden. Sie werden in engem Bezug zu Sachproblemen erarbeitet und erweisen sich als erforderlich zur Lösung außermathematischer Fragestellungen. Im *Leistungsfach* soll ein vertieftes wissenschaftspropädeutisches Verständnis vermittelt werden. Innermathematische Fragestellungen bestimmen überwiegend Stoffauswahl und Unterrichtsmethode. Gestützt auf umfangreicheres Wissen, die Beherrschung einer Methodenvielfalt und vertiefte Einsichten in mathematische Zusammenhänge wird dann die Behandlung komplexerer und umfassenderer Anwendungen möglich.

* Im *Grundfach* sollen die Schülerinnen und Schüler Denk- und Arbeitsweisen der Mathematik erfahren, indem sie eine Vorstellung davon gewinnen, wie man in den geforderten Themenbereichen zu zentralen Begriffen und Aussagen gelangt und wofür die erarbeiteten Methoden und Verfahren benötigt werden. Dies soll exemplarisch geschehen; Vollständigkeit und Lückenlosigkeit bei der Behandlung eines Stoffgebiets und durchgehende formale Exaktheit können und sollen nicht angestrebt werden.
  Im *Leistungsfach* sollen die Schülerinnen und Schüler einen Einblick in die Mathematik als Wissenschaft gewinnen. Dies erfolgt u.a. durch eine umfassendere, intensivere Beschäftigung mit den einzelnen Themenfeldern, Erfahrungen mit gebietsübergreifenden Vernetzungen und einem vertieften Eindringen in die Denk- und Arbeitsweisen der Mathematik. Dabei sollen die Schülerinnen und Schüler angeleitet werden und lernen, sich selbständig mit fachlichen Problemen auseinanderzusetzen.

* Im *Grundfach* können vielfach Plausibilitätsbetrachtungen sowie anschauungs- oder beispielgebundene Begründungen an die Stelle exakter Beweise treten, wenn dies bewusst gemacht wird.
  Im *Leistungsfach* sollen die Schülerinnen und Schüler an unterschiedlichen Beispielen das Beweisen lernen. Dabei ist zunehmend eine größere Strenge der Beweisführung anzustreben. Dies ist möglich, da Schülerinnen und Schüler eines Leistungskurses in der Regel für die Erarbeitung möglichst vollständiger und formal korrekter Beweise motiviert werden können.

Hinweise zur Handhabung des Lehrplans

Der Lehrplan ist so konzipiert, dass die Lehrerinnen und Lehrer möglichst viel Entscheidungsspielraum in der Stoffanordnung und in der Unterrichtsgestaltung haben. Dadurch wird ein intensiveres Eingehen auf die Fähigkeiten und Interessen der Schülerinnen und Schüler ermöglicht, und es werden Freiräume für die Erprobung neuer fachlicher, didaktischer und methodischer Aspekte sowie Voraussetzungen für fachübergreifendes und fächerverbindendes Arbeiten geschaffen. Im Folgenden werden einerseits die Entscheidungsspielräume näher erläutert und andererseits aufgezeigt, in welchen Teilen der Lehrplan verbindlich ist.

Reihenfolge der Inhalte

Eine Zuordnung des Pflichtstoffs zu Schuljahren oder Halbjahren erfolgt nicht. Über die Stoffabfolge in den Jahrgangsstufen 11 – 13 entscheidet die Fachlehrerin bzw. der Fachlehrer unter Beachtung folgender Bedingungen:

– Durch Abstimmung der Inhalte muss sichergestellt werden, dass die Schülerinnen und Schüler zum Zeitpunkt der Umwahl zwischen Grundkurs und Leistungskurs wechseln können.
– In der Hauptphase müssen Themen aus allen drei Gebieten (Analysis, Lineare Algebra/Analytische Geometrie, Stochastik) behandelt werden.

Verbindlichkeit der Ziele/Inhalte und Hinweise

Die Ziele und Inhalte sind in Themenbereiche gegliedert. Sie beziehen sich auf die Vermittlung von Sach- und Methodenkompetenz und sind verbindlich. Innerhalb der einzelnen Themenbereiche sind die Ziele nach fachsystematischen Gesichtspunkten angeordnet. Diese Anordnung stellt keine Reihenfolge im Sinne eines Lehrgangs dar.

In den Vorbemerkungen zu den einzelnen Themenbereichen und in der rechten Spalte werden didaktische Begründungen, methodische Anregungen, Hinweise zur Unterrichtsgestaltung, zur intendierten Tiefe der Behandlung und zur inneren Differenzierung gegeben, gebiets- und fachübergreifende Querverbindungen aufgezeigt, Möglichkeiten des Computereinsatzes und der Einbeziehung von Anwendungen genannt. Die Vorbemerkungen und Hinweise sind nicht verbindlich. Insbesondere liegt die Entscheidung über Unterrichtsgestaltung und -methoden bei den Fachlehrerinnen und -lehrern.

Zeitrichtwerte

Zu allen Themenbereichen werden Zeitrichtwerte in Unterrichtsstunden angegeben. Sie sind nicht verbindlich, sondern sollen zum einen Orientierungshilfe für die Unterrichtsplanung sein und zum anderen verdeutlichen, in welchem Umfang und mit welcher Intensität der jeweilige Themenbereich bearbeitet werden soll.

Zeitliche Freiräume
Die verpflichtenden Inhalte sind auf 25 Unterrichtswochen pro Schuljahr begrenzt, damit ein Freiraum bleibt. Die Verkürzung von Schuljahren bzw. Halbjahren ist dabei entsprechend berücksichtigt.

Am Anfang der Jahrgangsstufe 11 sollte der Freiraum in erster Linie genutzt werden, unterschiedliche Vorkenntnisse bei den Schülerinnen und Schülern auszugleichen.

In den Jahrgangsstufen 12/13 kann der Freiraum für Wiederholungen und Übungen zur Festigung und Vertiefung, für Weiterführungen sowie für gebiets- und fachübergreifende Unterrichtsvorhaben genutzt werden. Er kann aber auch der Erprobung neuer fachlicher, didaktischer und methodischer Ansätze dienen.

Wahlpflichtgebiete
In den Themenbereichen "Lineare Algebra/Analytische Geometrie" und "Stochastik" sind weitere Entscheidungsspielräume bei der Stoffauswahl eröffnet, indem mehrere Wahlpflichtgebiete angeboten werden, von denen jeweils eines zu behandeln ist.

Computer im Mathematikunterricht

1. Didaktische Einsatzschwerpunkte

Der Einsatz von Computern kann und soll den Mathematikunterricht unter sehr unterschiedlichen Aspekten bereichern. Welcher Aspekt jeweils im Vordergrund steht, richtet sich nach dem Thema, nach der Zielsetzung des Unterrichts und nach Vorkenntnissen und Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler. Folgende Schwerpunktsetzungen bieten sich an:

* Der Computer als didaktisches Werkzeug

  Geeignete Programme fördern entdeckendes Lernen. Durch Variation von Parametern können anhand zahlreicher, von den Schülerinnen und Schülern selbstgewählter Beispiele Zusammenhänge und Gesetzmäßigkeiten entdeckt, Behauptungen bestätigt bzw. falsifiziert und Vermutungen modifiziert werden.
  Eine besonders wichtige Rolle spielen dabei verschiedene Arten von Grafikprogrammen (z.B. Zeichen- und Geometrieprogramme, Funktionsplotprogramme). Sie dienen der Visualisierung mathematischer Beziehungen und Eigenschaften. Dies kann den Schülerinnen und Schülern zu klareren Vorstellungen, zu besserem Verstehen und zu tieferen Einsichten verhelfen.

* Der Computer als Hilfsmittel zur Lösung numerischer und algebraischer Aufgaben

  Die Fähigkeit von Computern und Taschenrechnern, in kürzester Zeit größere numerische Berechnungen durchzuführen, ermöglicht es, im Unterricht umfangreiches vorliegendes Zahlenmaterial zu bearbeiten (z.B. in der Statistik) oder numerische Daten zur Auswertung bereitzustellen (z.B. bei Simulationen).
  Ein Computer-Algebra-System sollte dort eingesetzt werden, wo aufwendige algebraische Operationen (z.B. bei Termen, Gleichungen, Funktionen, Matrizen) vom Wesentlichen ablenken. Dies kann z.B. der Fall sein, wenn bei Anwendungsproblemen der Kalkül den Blick für den Prozess der Modellbildung verstellt oder wenn bei Beweisen von Sätzen und Regeln algebraische Umformungen wichtiger erscheinen als das Erfassen der logischen Beweisstruktur.

* Der Computer als Anreiz, sich mit Algorithmen zu beschäftigen

  Die Schulung des algorithmischen Denkens ist eines der allgemeinen Ziele des Mathematikunterrichts. Dies vollzieht sich zum Beispiel, wenn an geeigneten Stellen des Unterrichts algorithmisches Vorgehen bewusst gemacht wird, wenn mathematische Algorithmen analysiert und modifiziert werden und wenn die Schülerinnen und Schüler selbst zu einfachen mathematischen Problemstellungen Algorithmen erstellen und notieren. Für die Schülerinnen und Schüler ist es dann sehr wichtig zu erfahren, dass der Algorithmus, mit dem sie sich auseinandergesetzt haben, als Computerprogramm “zum Laufen kommt”.
  Allerdings sind Programmierübungen und das Erlernen einer Programmiersprache genauso wenig Aufgabe und Ziel des Mathematikunterrichts, wie eine vertiefte theoretische Behandlung des Algorithmus und seiner Eigenschaften im Sinne der Informatik. Der Mathematikunterricht hat hier andere Schwerpunktsetzungen als der Informatikunterricht.

2. Möglichkeiten der thematischen Anbindung

Im vorliegenden Lehrplan wurde auf verbindliche Forderungen zum Einsatz des Computers im Rahmen eines bestimmten Themas oder zur Realisierung bestimmter Ziele verzichtet. Gleichwohl wird erwartet, dass der Computer an geeigneten Stellen im Unterricht als Werkzeug mit den oben genannten Schwerpunkten benutzt wird. Gerechtfertigt und sinnvoll ist die Einbeziehung des Computers in den Unterricht sicher immer dann, wenn mit ihm die angestrebte Sach- und Methodenkompetenz besser vermittelt werden kann als ohne ihn.
In welchen konkreten Unterrichtssituationen und bei welchen Inhalten der Computereinsatz angezeigt ist, kann nur die Fachlehrkraft, bezogen auf ihr methodisches Konzept und orientiert an den Fähigkeiten und Fertigkeiten der Lerngruppe, entscheiden. Der Lehrplan gibt dazu Anregungen. An zahlreichen Stellen, an denen der Computer den Unterricht bereichern kann und deshalb ein Einsatz empfohlen wird, sind entsprechende Hinweise den jeweiligen Lernzielen zugeordnet. Dabei wird auch aufgezeigt, welcher der in Abschnitt 1 genannten didaktischen Schwerpunkte jeweils im Vordergrund steht.

3. Ausblick

Die schnell fortschreitende Weiterentwicklung der Informations- und Kommunikationstechnologien wird zu Veränderungen des Mathematikunterrichts führen. Die immer leistungsfähigere Software, eine Miniaturisierung der Hardware und ihre zunehmende Verfügbarkeit wirken sich vor allem auf die Methoden des Mathematikunterrichts aus. In gewissen Teilgebieten der Schulmathematik wird auch eine Umgewichtung der inhaltlichen Schwerpunktsetzungen notwendig werden. Der Lehrplan ist für die Entwicklung neuer methodischer Wege offen und will bewusst zu Erprobungen anregen und ermuntern.

Die Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts betrifft vor allem
- eine stärkere Betonung experimenteller Arbeitsweisen
- ein Zurückdrängen von Routineaufgaben und Aufgabentypen, die durch einen Algorithmus gelöst werden (z.B. Termumformungen, Lösen von Gleichungssystemen, Differentiations- und Integrationsverfahren, Kurvenuntersuchungen)
- eine Vergrößerung des Anteils an Aufgaben, die Problemlöseverhalten und die Anwendung heuristischer Verfahren herausfordern
- das Einbeziehen von offeneren Aufgabestellungen, bei denen der Lösungsweg nicht eng durch Frageketten oder Lösungsrezepte vorgeschrieben ist, sondern schon das Auffinden geeigneter Fragen von den Schülerinnen und Schülern geleistet werden muss
- neue Lernformen
- neue Formen der Leistungsmessung
- eine veränderte Lehrerrolle.

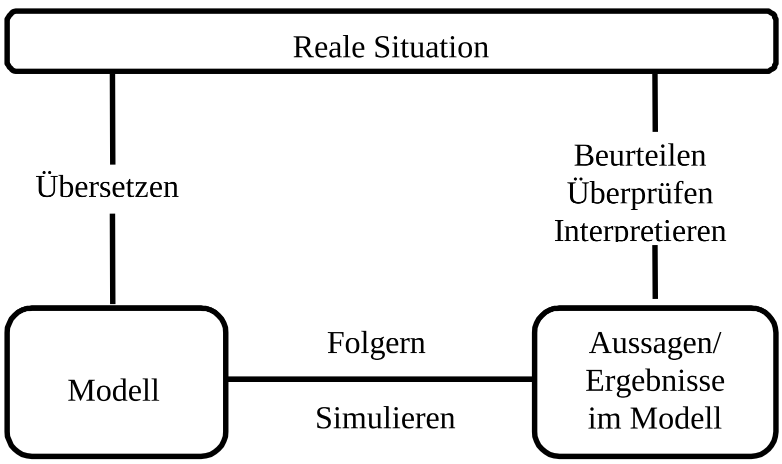
Voraussetzung für solche Veränderungen in den Methoden des Mathematikunterrichts und Verlagerungen der Schwerpunkte ist allerdings, dass allen Schülerinnen und Schülern in der Schule und zu Hause die entsprechenden Medien zur Verfügung stehen.

Problemlösen mit mathematischen Methoden - Modellbildung

Schule hat heute verstärkt den Auftrag, ausgehend von der Erfahrungswelt der Kinder und Jugendlichen, Sach- und Methodenkompetenz bezogen auf die Lebenswirklichkeit zu vermitteln. Dies betrifft alle Fächer. Für den Mathematikunterricht bedeutet es u.a. die Hinwendung zu einer stärkeren Anwendungsorientierung, die notwendigerweise über die Fachgrenzen hinausführt. Erfahrungen mit Anwendungen von Mathematik müssen im Unterricht an Prozessen gewonnen werden, bei denen Mathematik einen Beitrag zum Problemlösen in Gesellschaft, Wirtschaft, Wissenschaft oder Technik leistet. Damit rückt didaktisch das *Modellbilden* als ein wichtiges Ziel des Mathematikunterrichts in den Vordergrund.

1. Der Prozess der Modellbildung

Unter Modellbildung wird ein Prozess verstanden, in dem von einer realen Situation durch Reduktion der Komplexität und Idealisierungen ein Bild, ein Modell entworfen wird, das eine Bearbeitung der Problemstellung mit mathematischen Mitteln erlaubt. Dabei müssen zwischen Modell und Wirklichkeit möglichst weitgehende Analogien bestehen. Die sich aus der Bearbeitung der Problemstellung im Modell ergebenden Konsequenzen müssen schließlich mit der Realität verglichen werden; die Überprüfung kann zu einer Modifikation oder zu der Notwendigkeit eines neuen Ansatzes führen. Die Interpretation der Problemlösung im Modell führt zu Aussagen über die Lösung des realen Problems.



Schritte der mathematischen Problemlösung

Die folgende Einteilung des mathematischen Problemlösens in sechs Schritte darf nicht als lineare Abfolge einzelner Phasen verstanden werden. Sie dient dazu, den verschachtelten Entwicklungsprozess zu strukturieren. Bei jedem Schritt kann eine Veränderung oder Anpassung vorangegangener Schritte notwendig werden. Schleifen und Verschachtelungen in der Abfolge der Schritte sind typisch für den Problemlöseprozess.

1. Erfassen des Problems des Anwenders
   Zunächst muss aus dem in der Sprache des Anwenders beschriebenen Problem die von dem Mathematiker zu bearbeitende Fragestellung herausgearbeitet und möglichst treffend formuliert werden. In dieser Phase ist eine enge Zusammenarbeit zwischen Anwender und Mathematiker erforderlich.

2. Eindeutige Beschreibung des Problems
   Die vorliegenden Informationen werden im Hinblick auf die Fragestellung geordnet und auf Vollständigkeit geprüft, überflüssige Informationen und Details werden als solche erkannt und weggelassen. Die ursprüngliche Fragestellung wird auf das vom Anwender gewünschte Ergebnis hin präzisiert. Die gewünschte Form der Ergebnisse wird beschrieben. Auch diese Phase erfordert eine enge Zusammenarbeit zwischen Anwender und Mathematiker.

3. Modellierung des Problems
   Anhand der vorliegenden genauen Problembeschreibung wird nun nach geeigneten mathematischen Strukturen und Verfahren gesucht, die zur mathematischen Modellierung des Problems geeignet sind. In diesem Zusammenhang ist häufig eine Zerlegung in Teilprobleme notwendig.

4. Mathematische Lösung in dem gewählten Modell
   In dieser Phase werden die Teilprobleme bearbeitet und deren Lösungen - nach Überprüfung und Bewertung (s. Schritt 5) - zu einer Gesamtlösung zusammengefügt. Ist eine Teillösung oder die Gesamtlösung in dem gewählten Modell zu aufwendig oder unmöglich, muss ein neuer Modellierungsansatz gefunden werden.

5. Überprüfung und Bewertung der Lösung
   Das mathematische Modell wird getestet und mit den Vorgaben verglichen. Dazu gehört auch eine kritische Reflexion und Bewertung des eingeschlagenen Lösungswegs. Dabei können erneut Verbesserungen und Präzisierungen notwendig werden, die eine Modifikation der mathematischen Lösung, ja sogar eine andere Auswahl der mathematischen Strukturen und Verfahren bedingen.

6. Interpretation in der Sprache des Anwenders
   Die Lösung wird in die Sprache des Anwenders zurückübersetzt. Dabei werden auch zusätzliche Bewertungen und Einschränkungen bei den Lösungen (Grenzen des Modells) mitgeliefert. In dieser Phase ist eine enge Zusammenarbeit zwischen Mathematiker und Anwender erforderlich.

2. Beiträge zur Methodenkompetenz

Wenn das Modellieren wie eine Leitlinie den Mathematikunterricht der gymnasialen Oberstufe durchzieht, werden auch wichtige Methodenziele realisiert.

* Die Schülerinnen und Schüler gewinnen eine an der Wirklichkeit orientierte Vorstellung von der Bedeutung der Mathematik in Anwendungsbereichen.

* Die Notwendigkeit eines fachübergreifenden Denkens in größeren Zusammenhängen unter Berücksichtigung der vielseitigen Wechselwirkungen wird in Anwendungssituationen in besonderer Weise erfahrbar.

* Vernetztes Denken wird insbesondere dadurch gefördert, dass durch die Möglichkeit des Computereinsatzes auch Vorgänge in komplexeren Systemen und Strukturen modelliert und simuliert werden können.

* Durch wiederholtes bewusstes Durchlaufen der Schritte des Modellbildungsprozesses werden bei den Schülerinnen und Schülern Strategien des Problemlöseverhaltens entwickelt, was auch einen besonderen Beitrag zum Methodenlernen und zur Entwicklung allgemeiner geistiger Fähigkeiten der Jugendlichen darstellt.

3. Möglichkeiten unterrichtlicher Umsetzung

Der Modellbildungsprozess kann von den Schülerinnen und Schülern auf verschiedenen Niveaustufen und mit unterschiedlicher Intensität erfahren bzw. vollzogen werden. Im Folgenden sind drei Stufen beschrieben.

Stufe 1

Die “Schritte der mathematischen Problemlösung” (vgl. 1. Abschnitt) werden in vereinfachter Form von den Schülerinnen und Schülern angewendet, ohne dass diese Schritte thematisiert werden.

Dies geschieht z.B. beim Lösen von Sachaufgaben. Der Modellierungsprozess muss jedesmal mehr oder weniger bewusst durchlaufen werden. Wenn auch die “Schritte der mathematischen Problemlösung” auf dieser Stufe noch nicht thematisiert werden, so können sie doch den Schülerinnen und Schülern in vereinfachter Form bewusst gemacht und als “Hilfe zum Lösen von Sachaufgaben” zur Verfügung gestellt werden:

– In Sachaufgaben die Problemstellung erkennen und mit eigenen Worten wiedergeben
– Die für die Lösung des Problems wesentlichen Informationen aus dem Text separieren
– Die Zusammenhänge zwischen den wesentlichen Informationen erkennen
– Das Sachproblem einem für die Lösung geeigneten mathematischen Verfahren zuordnen
– Die Lösung ermitteln
– Das mathematische Ergebnis wieder auf den Sachzusammenhang beziehen.

Stufe 2

Die “Schritte der mathematischen Problemlösung” werden den Schülerinnen und Schülern bewusst gemacht.

Der Modellierungsprozess kann den Schülerinnen und Schülern bewusst gemacht werden, wenn im Unterrichtsgespräch geeignete Sachprobleme Ausgangspunkt für die Erarbeitung mathematischer Inhalte sind oder wenn diese Inhalte auf Sachprobleme angewendet werden. Hier geht es um Unterrichtseinheiten, die zwar auf ein bestimmtes mathematisches Thema gerichtet sind (z.B. Integral, Testen von Hypothesen, Matrizenoperationen, Differentialgleichungen), deren Inhalte aber nicht innermathematisch motiviert und erschlossen werden.

Stufe 3

Die “Schritte der mathematischen Problemlösung” werden von den Schülerinnen und Schülern selbständig angewendet.

Auf dieser Stufe sollen die Schülerinnen und Schüler komplexere Sachprobleme mit selbstgesuchten Mitteln aus verschiedenen mathematischen Teilbereichen lösen. Gegebenenfalls sind fachübergreifend Informationen zu besorgen oder Bezüge zu anderen Fächern herzustellen. Die Aufgabenstellungen müssen sehr offen gehalten sein, damit die Schülerinnen und Schüler gezwungen sind, bereits die ersten Schritte der Modellbildung selbständig zu gehen.
Die Auseinandersetzung mit dem gestellten Problem wird geraume Zeit beanspruchen. Deshalb ist es empfehlenswert, solche Übungen im Rahmen eines Projekts anzusiedeln. Ferner sollte die Möglichkeit bestehen, in Gruppen zu arbeiten.
Um den Schülerinnen und Schülern sehr unterschiedliche Modellierungsansätze offen zu halten, sollten für Gruppen, die Berechnungen oder Simulationen am Computer ausführen wollen, die entsprechenden Voraussetzungen geschaffen sein.

4. Empfehlungen für die unterrichtliche Umsetzung

Die Schülerinnen und Schüler sollen in allen Jahrgangsstufen der gymnasialen Oberstufe an geeigneten Beispielen (auch gebiets- und fachübergreifend) Anwendungsprobleme mathematisieren und die “Schritte der mathematischen Problemlösung” vollziehen.

Die in den Stufen 1 und 2 beschriebenen Möglichkeiten sollen fester Bestandteil auch des herkömmlich geführten Unterrichts sein. Modellieren in diesem Sinn soll sich wie ein roter Faden durch die Jahrgangsstufen 11 bis 13 ziehen.

Für die Realisierung eines projektähnlichen Vorhabens, wie es in der Stufe 3 beschrieben ist, bietet sich vor allem die Jahrgangsstufe 13 an, weil dann die erforderlichen mathematischen Kenntnisse und Fertigkeiten bereitstehen.

Themenübersicht für die Jahrgangsstufen 11 bis 13

Grundfach

Grenzwerte
Differentialrechnung
Integralrechnung
Exponentialfunktionen

Lineare Algebra / Analytische Geometrie

wahlweise

- Geraden und Ebenen im Raum
- Geometrische Abbildungen und Matrizen
- Matrizen in praktischen Anwendungen

Stochastik 1

Stochastik 2

wahlweise

- Simulation von Zufallsexperimenten
- Testen von Hypothesen
- Schätzen von Wahrscheinlichkeiten

Leistungsfach

Grenzwerte
Differentialrechnung
Integralrechnung
Weiterführung der Differential- und Integralrechnung

Lineare Algebra / Analytische Geometrie

wahlweise

- Vektorielle analytische Geometrie
- Vektoren und Matrizen
- Vektorräume und lineare Abbildungen – Anwendungen

Stochastik

Grundfach

Wiederholung von Grundlagen

In der Einführungsphase kann es sich als erforderlich erweisen, gezielt bestimmte Kenntnisse und Fertigkeiten aus der Sekundarstufe I zu wiederholen und wieder verfügbar zu machen. Dies wird vor allem dann der Fall sein, wenn Schülerinnen und Schüler aus verschiedenen Lerngruppen oder mit unterschiedlichem Bildungsgang in einem Kurs zusammenkommen.

Empfohlen wird, die Wiederholung in den laufenden Unterricht zu integrieren und nicht mit dem Auffrischen bekannter Inhalte zu beginnen. Es hat sich bewährt, zu Beginn der Jahrgangsstufe 11 ein Thema zu wählen, das für alle Schülerinnen und Schüler neu ist und deshalb Interesse und Motivation wecken kann.

In bestimmten Fällen kann es aber auch sinnvoll oder notwendig sein, zu Beginn der Jahrgangsstufe 11 Grundlagen für das weitere unterrichtliche Arbeiten bereitzustellen. Bei der Planung einer solchen Wiederholungsphase sollte allerdings folgendes beachtet werden:

* Der Zeitansatz sollte 6 - 8 Unterrichtsstunden nicht überschreiten.

* Der Stoffumfang soll auf ein Minimum beschränkt sein.
  Folgende Inhalte werden empfohlen:
  - Lösen von linearen Gleichungen, quadratischen Gleichungen und linearen Gleichungssystemen mit zwei Variablen
  - Definition des Funktionsbegriffs und Darstellungen von Funktionen
  - Lineare und einfache quadratische Funktionen.

Die Wiederholung weiterer Funktionsklassen und der Eigenschaften von Funktionen soll erst dann erfolgen, wenn diese im Rahmen weiterführender Untersuchungen (z.B. im Rahmen der Differentialrechnung) angesprochen werden.

Grenzwerte

Zeitrichtwert: 18 Unterrichtsstunden*

Ziel dieses Unterrichtsabschnitts ist es, eine inhaltliche Vorstellung des Grenzwertbegriffs bei den Schülerinnen und Schülern zu wecken, eine ihrer Leistungsfähigkeit angemessene Präzisierung der Definition zu erreichen und sie zu befähigen, Grenzwerte zu bestimmen.

Der Zugang zum Grenzwertbegriff über Zahlenfolgen baut auf Vorkenntnissen aus der Sekundarstufe I auf. An eine extensive Behandlung von Zahlenfolgen und deren Eigenschaften ist nicht gedacht. Da sich rekursive Folgen in besonderer Weise eignen, ein Verständnis des Grenzwertbegriffs zu entwickeln, und ferner Rekursionen in den Anwendungen der Mathematik eine immer größere Bedeutung gewinnen, ist ein Eingehen auf diese Folgen im Unterricht ausdrücklich gefordert.

Im Zusammenhang mit der Reflexion über Grenzprozesse sollen auch historische Aspekte (Ringen um eine Präzisierung grundlegender Begriffe) und philosophische Ausblicke (Erfahrungen mit dem Infiniten) in den Unterricht einbezogen werden.

Ziele / Inhalte (Sach- und Methodenkompetenz)	Hinweise zu Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
1. Die explizite und rekursive Beschreibung von Zahlenfolgen verstehen und Eigenschaften von Zahlenfolgen kennen	Die Schülerinnen und Schüler sollen zu vorgegebenem Bildungsgesetz Folgenglieder bestimmen und umgekehrt in einfacheren Fällen ein Bildungsgesetz angeben können.
2. Den Begriff “Grenzwert einer Folge” verstehen	Der Begriff “Grenzwert” soll exemplarisch an Zahlenfolgen erfahren werden. Die Schülerinnen und Schüler sollen eine inhaltliche Vorstellung davon gewinnen, was in der Mathematik unter einem Grenzwert verstanden wird. Der Begriff kann auf unterschiedlichen Niveaustufen erschlossen werden. Im Grundkurs genügt eine an der Definition orientierte verbale Beschreibung; auf eine Formalisierung (ε–n_0–Fassung) sollte verzichtet werden.
3. Die Grenzwertsätze für Summe, Produkt und Quotient von Folgen kennen und anwenden	Die Gültigkeit der Grenzwertsätze wird an Beispielen einsichtig gemacht.
4. Grenzwerte bestimmen	

*Für Übung und Festigung müssen ggf. weitere Stunden aus dem Freiraum hinzugenommen werden.

Differentialrechnung

Zeitrichtwert: 40 Unterrichtsstunden*

Ziel dieses Unterrichtsabschnitts ist es, bei den Schülerinnen und Schülern eine anschauliche Vorstellung vom Differentialquotienten aufzubauen, Folgerungen aus der Definition zu ziehen und die gewonnenen Aussagen in verschiedenen Sachbezügen anzuwenden.

Der Differentialquotient kann ausgehend von einer geometrischen Problemstellung (Tangentenproblem) oder von der Frage nach Änderungsraten im Rahmen eines Sachproblems erarbeitet werden. Der Grenzwertbegriff soll dabei eine Anwendung und Vertiefung erfahren. Mit dem Differentialquotienten und der Technik des Ableitens lernen die Schülerinnen und Schüler ein wirkungsvolles Werkzeug kennen, das es gestattet, funktionale Zusammenhänge und deren Eigenschaften in den Anwendungsbereichen Naturwissenschaften, Technik, Umwelt, Wirtschafts- und Sozialwissenschaften zu untersuchen und zu deuten.

Ziele / Inhalte (Sach- und Methodenkompetenz)	Hinweise zu Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
1. Den Begriff “Ableitung an einer Stelle” verstehen	Die Ableitung sollte als Grenzwert von Sekantensteigungen eingeführt werden.
2. Die Ableitung als momentane Änderungsrate interpretieren	Im Hinblick auf die zentrale Bedeutung des Differentialquotienten sollen die Schülerinnen und Schüler auch mindestens eine nicht-geometrische Interpretation kennen.
3. Den Begriff “Ableitungsfunktion” verstehen	
4. Faktor-, Summen- und Potenzregel kennen	
5. Zu einer vorgegebenen Funktion die Ableitungsfunktion und höhere Ableitungen bestimmen	
6. Den Graphen der Ableitungsfunktion zu einem vorgegebenen Funktionsgraphen skizzieren	Der Einsatz eines geeigneten Computerprogramms wird empfohlen, um den Zusammen-hang zwischen den beiden Graphen an unterschiedlichen Funktionen anschaulich erfahrbar zu machen.
7. Notwendige und hinreichende Kriterien für Monotonie und für die Existenz von Extrema und Wendepunkten anschaulich begründen und anwenden	

*Für Übung und Festigung müssen ggf. weitere Stunden aus dem Freiraum hinzugenommen werden.

Ziele / Inhalte (Sach- und Methodenkompetenz)	Hinweise zu Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
8. Ganzrationale Funktionen diskutieren	Es genügen einige charakteristische Beispiele. Wenn Funktionsplotprogramme mit speziellen Optionen (z.B. Zoom, Trace) zugelassen werden, müssen die Aufgabenstellungen zur Funktionsuntersuchung dem angepasst sein.
9. Funktionsgleichungen ganzrationaler Funktionen aus vorgegebenen Eigenschaften bestimmen	Es genügen einige charakteristische Beispiele.
10. Extremwertaufgaben aus verschiedenen Anwendungsgebieten lösen	

Integralrechnung

Zeitrichtwert: 27 Unterrichtsstunden*

Für die Behandlung der Integralrechnung sind verschiedene methodische Wege möglich. Die folgenden Ziele legen keinen Weg fest. Im Grundkurs sollte ein Zugang gewählt werden, der möglichst schnell zu Anwendungsaufgaben führt.

Die zentrale Bedeutung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung wird auch im Grundkurs herausgearbeitet. Der Zeitpunkt der Behandlung richtet sich nach dem gewählten Weg. Es kann hilfreich sein, wenn der Hauptsatz möglichst früh zur Verfügung steht; man kann ihn aber auch zurückstellen, um zunächst an Sachaufgaben mit ganzrationalen Funktionen die Anwendungen der Integralrechnung erfahren zu lassen.

Ziele / Inhalte (Sach- und Methodenkompetenz)	Hinweise zu Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
1. Flächeninhalte unter Funktionsgraphen mit Hilfe von Rechtecksummen bestimmen	Für umfangreiche Termumformungen empfiehlt sich der Einsatz eines Computer-Algebra-Systems. Die Schülerinnen und Schüler sollen auch erfahren, wie mit Hilfe von Rechnern Flächeninhalte bzw. Integrale numerisch angenähert werden können.
2. Den Integralbegriff verstehen	
3. Faktor-, Summen- und Potenzregel kennen und zur Berechnung von Integralen anwenden .	Die Regeln werden an Beispielen oder durch Veranschaulichungen einsichtig gemacht. An die Behandlung der Regeln können sich unmittelbar Anwendungsaufgaben mit ganzrationalen Funktionen anschließen. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung wird bei diesem Vorgehen zurückgestellt.
4. Den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung verstehen	Erarbeitung und Begründung des Hauptsatzes können sich im Grundkurs weitgehend auf konkrete Beispiele und auf anschauungsgebundene, an Graphen orientierte Argumentationen stützen. Die Integrationsregeln sollten mit Hilfe des Hauptsatzes begründet bzw. bestätigt werden.

*Für Übung und Festigung müssen ggf. weitere Stunden aus dem Freiraum hinzugenommen werden.

Ziele / Inhalte (Sach- und Methodenkompetenz)	Hinweise zu Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
5. Integrale mit Hilfe von Stammfunktionen berechnen	
6. Sachaufgaben, die auf Integrale führen, lösen	Im Vordergrund stehen Flächenberechnungen. Exemplarisch sollen die Schülerinnen und Schüler aber auch erfahren, dass die Integralrechnung allgemein bei Problemen angewendet werden kann, zu deren Lösung der Grenzwert einer Summe von Produkten bestimmt werden muss; z.B.: – Arbeit aus Kraft und Weg – Weg aus Geschwindigkeit und Zeit – Volumen aus Strömungsstärke und Zeit – Volumen von Rotationskörpern.

Exponentialfunktionen

Zeitrichtwert: 15 Unterrichtsstunden*

Im Grundkurs steht der Aspekt der Anwendung von Mathematik im Vordergrund. Deshalb werden neben den ganzrationalen Funktionen die Exponentialfunktionen, die der mathematischen Beschreibung von Wachstums- und Abnahmeprozessen in ganz unterschiedlichen Bereichen dienen, ausführlicher behandelt.

Anknüpfend an den Unterricht in Klasse 10 müssen in der Regel Eigenschaften der Exponentialfunktionen wiederholt werden. Ferner muss den Schülerinnen und Schülern bewusst sein, dass die Logarithmusfunktion die Umkehrung der Exponentialfunktion ist. Die Frage nach Änderungsraten, Wachstums- und Zerfallsgeschwindigkeiten führt dann zu den Ableitungen der Exponentialfunktionen. Abschließend kann auch hier anhand komplexerer Aufgabenstellungen der Modellbildungsprozess verdeutlicht werden.

Die folgenden Ziele können auf verschiedenen didaktischen Wegen realisiert werden. Die Formulierung der Ziele hält eine Entscheidung offen, welcher Weg gewählt wird. Die Anordnung der Ziele soll auch hier keine Reihenfolge im Sinne eines Lehrgangs festlegen.

Ziele / Inhalte (Sach- und Methodenkompetenz)	Hinweise zu Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
1. Die e-Funktion als spezielle Exponentialfunktion kennen und eine Exponentialfunktion in der Form $f(x) = a \cdot e^{kx}$ schreiben	
2. Die Funktion f(x) = ln x als Umkehrung der e-Funktion kennen	
3. Die Ableitung der e-Funktion kennen und die Herleitung verstehen	
4. Die Ableitung von $f(x) = a \cdot e^{kx}$ kennen und anwenden	Die Ableitung von $f(x) = a \cdot e^{kx}$ sollte anschaulich bzw. beispielgebunden einsichtig gemacht werden.
5. Sachaufgaben zu Wachstums- und Zerfallsprozessen lösen	Auf Idealisierungen bei der Annahme exponentiellen Wachstums bzw. Zerfalls soll besonders eingegangen werden (Modellbildung).

*Für Übung und Festigung müssen ggf. weitere Stunden aus dem Freiraum hinzugenommen werden.

Lineare Algebra/Analytische Geometrie

Zum Themenbereich Lineare Algebra/Analytische Geometrie wird in der Fachdidaktik eine Vielzahl sehr unterschiedlicher algebraischer und geometrischer Inhalte gezählt, die auf vielfältige Weise zueinander in Beziehung stehen und miteinander verflochten sind, zum Beispiel: Untersuchung geometrischer Gebilde im Raum, affine Abbildungen, Matrizen und Vektoren in Anwendungen, Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme. Alle diese Aspekte und ihre gegenseitigen Bezüge im Unterricht thematisieren zu wollen, würde bei weitem den zeitlichen Rahmen übersteigen, der für den Themenbereich Lineare Algebra/Analytische Geometrie zur Verfügung steht. Andererseits würde es eine unnötige Einengung bedeuten, die Lehrerinnen und Lehrer auf *eine* bestimmte didaktische und inhaltliche Schwerpunktsetzung festzulegen.

Um den Lehrerinnen und Lehrern einen möglichst großen Spielraum für didaktische Entscheidungen einzuräumen, werden **drei Wahlpflichtgebiete** angeboten. Allen gemeinsam ist ein Grundbestand an algebraischen und geometrischen Inhalten und Verfahren. Jedoch wird in jedem Wahlpflichtgebiet ein anderer Schwerpunkt gesetzt, was auch Unterschiede bei der Stoffauswahl nach sich zieht. In den Vorbemerkungen zu den Wahlpflichtgebieten sind die jeweiligen didaktischen Intentionen dargestellt.

In jedem Kurs muss **eines** der drei Wahlpflichtgebiete **vollständig** behandelt werden. Über die Inhalte des ausgewählten Wahlpflichtgebiets hinaus können weitere Themen zusätzlich im Rahmen des pädagogischen Freiraums angesprochen werden.

Wahlpflichtgebiet 1: Geraden und Ebenen im Raum

Zeitrichtwert: 44 Unterrichtsstunden*

Zu dem allen Wahlpflichtgebieten gemeinsamen Fundamentum gehören das Aufstellen und Lösen linearer Gleichungssysteme und eine Einführung in das Arbeiten mit Vektoren.
Lineare Gleichungssysteme sind in vielen Bereichen von Wissenschaft, Wirtschaft und Gesellschaft ein unentbehrliches Hilfsmittel zur mathematischen Bewältigung von Sachproblemen; auch viele innermathematische Fragestellungen führen auf lineare Gleichungssysteme. In diesem Wahlpflichtgebiet werden Fähigkeiten im Lösen von linearen Gleichungssystemen und Interpretieren von Lösungen, auch bei unter- oder überbestimmten Systemen, vor allem dazu benötigt, Lagebeziehungen zwischen Geraden und Ebenen analytisch zu klären. Darüber hinaus sollen auch Anwendungsaufgaben aus verschiedenen Sachgebieten, die auf lineare Gleichungssysteme führen, gelöst werden.

Im Mittelpunkt des Wahlpflichtgebiets stehen die Erarbeitung der vektoriellen Geraden- und Ebenengleichung und die Untersuchung von Lagebeziehungen. Hinzu kommt das Ziel, das räumliche Vorstellungsvermögen der Schülerinnen und Schüler durch Zeichnen von Geraden und Ebenen zu fördern. Schließlich trägt die Beschreibung von Ebenen durch Koordinatengleichungen der Tatsache Rechnung, dass Ebenen und Geraden in naturwissenschaftlich-technischen Studiengängen vielfach durch Koordinatengleichungen und nicht durch Parametergleichungen dargestellt werden.
Die geometrische Interpretation der Lösungsmenge linearer Gleichungssysteme schlägt eine Brücke zu den behandelten Lagebeziehungen von Ebenen im Raum.

*Für Übung und Festigung müssen ggf. weitere Stunden aus dem Freiraum hinzugenommen werden.

Ziele / Inhalte (Sach- und Methodenkompetenz)	Hinweise zu Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
1. Zu einer geeigneten Problemstellung ein entsprechendes lineares Gleichungssystem aufstellen	Das Aufstellen und Lösen linearer Gleichungssysteme kann anhand von Sachaufgaben, bei der Untersuchung der gegenseitigen Lage von Geraden und Ebenen, aber auch – gebietsübergreifend – im Rahmen der Analysis (Bestimmen einer Funktion aus vorgegebenen Eigenschaften) behandelt werden.
2. Lineare Gleichungssysteme lösen	Die in der Sekundarstufe I behandelten Verfahren werden auf Systeme mit mehr als zwei Gleichungen und mehr als zwei Variablen erweitert. Im Vordergrund stehen 3x3-Systeme. Die Schülerinnen und Schüler sollen nicht auf ein bestimmtes Verfahren (z.B. Gauß-Algorithmus) festgelegt werden, sondern sich für einen möglichst günstigen Weg entscheiden. Wird der Rechenaufwand zu groß, sollten geeignete Computerprogramme eingesetzt werden. Wenn auch die Behandlung des Gauß-Algorithmus nicht verbindlich ist, wird dennoch empfohlen, exemplarisch einen Einblick in dieses Verfahren zu geben, und zwar unter dem Aspekt, einen Lösungsalgorithmus für Gleichungssysteme zu finden, den man auf den Computer übertragen kann.
3. Vektoren addieren und mit reellen Zahlen multiplizieren	Der Vektorbegriff umfasst hier Ortsvektoren, Pfeilklassen und Zahlentripel/-paare.
4. Den Begriff “Linearkombination” kennen und anwenden	
5. Die Parameterform der Geraden- und Ebenengleichung verstehen	
6. Die gegenseitige Lage von Geraden und Ebenen im Raum bestimmen	Es sollen die Fälle “Gerade – Gerade”, “Gerade – Ebene” und, exemplarisch, “Ebene – Ebene” untersucht werden. Die Lagebeziehungen “Gerade – Ebene” und “Ebene – Ebene” können auch nach Einführung der Normalengleichung der Ebene behandelt werden.

Ziele / Inhalte (Sach- und Methodenkompetenz)	Hinweise zu Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
7. Die Lage gegebener Geraden und Ebenen durch Zeichnen in ein Koordinatensystem veranschaulichen	Eine Beschränkung auf einfache Fälle ist möglich. Die Schülerinnen und Schüler sollen erkennen, dass das Einzeichnen von geeigneten Ausschnitten der Koordinatenebenen, das Markieren von Spurpunkten und Spurgeraden sowie das Beachten verdeckter Punkte und Linien den räumlichen Eindruck wesentlich verbessern. Zur Motivation und zur Unterstützung der Raumanschauung empfiehlt sich der Einsatz von Unterrichtssoftware, die Geraden und Ebenen im Koordinatensystem darstellt.
8. Das Skalarprodukt zweier Vektoren bestimmen und in geometrischen Fragestellungen anwenden	Unter geometrischen Anwendungen werden z.B. verstanden: – Berechnung von Winkeln – Prüfen von Orthogonalität – Bestimmen orthogonaler Vektoren – Beweise elementargeometrischer Sätze.
9. Die allgemeine Normalengleichung der Ebene kennen und anwenden	
10. Wissen und begründen, dass eine Koordinatengleichung mit drei Variablen eine Ebene beschreibt und die vom Lösen linearer Gleichungssysteme mit drei Variablen bekannten Fälle “eine Lösung”, “keine Lösung” oder “unendlich viele Lösungen” geometrisch deuten	

Wahlpflichtgebiet 2: Geometrische Abbildungen und Matrizen

Zeitrichtwert: 44 Unterrichtsstunden*

Zu dem allen Wahlpflichtgebieten gemeinsamen Fundamentum gehören das Aufstellen und Lösen linearer Gleichungssysteme und eine Einführung in das Arbeiten mit Vektoren.
Lineare Gleichungssysteme sind in vielen Bereichen von Wissenschaft, Wirtschaft und Gesellschaft ein unentbehrliches Hilfsmittel zur mathematischen Bewältigung von Sachproblemen; auch viele innermathematische Fragestellungen führen auf lineare Gleichungssysteme. Der Schwerpunkt des Unterrichts liegt auf Anwendungsaufgaben. Das Aufstellen eines dem Sachproblem angemessenen Gleichungssystems und die Interpretation der Lösung sind mindestens genau so wichtig wie die Durchführung eines Lösungsverfahrens.

Im Mittelpunkt des Wahlpflichtgebiets stehen geometrische Abbildungen. Dieses Thema entspricht in besonderer Weise den Zielen eines Grundkurses, weil manuelle Tätigkeiten (zeichnerische Konstruktion von Bildfiguren) und eine Anwendung der Vektorrechnung (algebraische Bestimmung der Bildfiguren) Hand in Hand gehen können. Ferner ist eine Verzahnung mit dem Geometrieunterricht der Sekundarstufe I möglich, indem die dort behandelten Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildungen jetzt von analytischem Standpunkt aus vertieft werden. Wenn auch diejenigen Abbildungen im Vordergrund stehen, die aus der Sekundarstufe I bekannt sind, so soll doch mindestens eine (affine) Abbildung, die nicht zum Pflichtstoff der Sekundarstufe I gehört (z.B. Scherung, Dehnung), und ihre Eigenschaften zusätzlich behandelt werden.

Schließlich ist eine Einführung in das Arbeiten mit Matrizen für viele Schülerinnen und Schüler auch deshalb nützlich, weil Matrizen in zahlreichen Berufszweigen und angewandten Wissenschaften zur Modellierung und Lösung von Sachproblemen genutzt werden. Die Schülerinnen und Schüler sollen in einem Ausblick mindestens eine der vielseitigen Anwendungen von Matrizen erfahren.

Ziele / Inhalte (Sach- und Methodenkompetenz)	Hinweise zu Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
1. Zu einer geeigneten Problemstellung ein entsprechendes lineares Gleichungssystem aufstellen	Das Aufstellen und Lösen linearer Gleichungssysteme kann anhand von Sachaufgaben, aber auch – gebietsübergreifend – im Rahmen der Analysis (Bestimmen einer Funktion aus vorgegebenen Eigenschaften) behandelt werden.
2. Lineare Gleichungssysteme lösen	Die in der Sekundarstufe I behandelten Verfahren werden auf Systeme mit mehr als zwei Gleichungen und mehr als zwei Variablen erweitert. Im Vordergrund stehen 3x3-Systeme. Die Schülerinnen und Schüler sollen nicht auf ein bestimmtes Verfahren (z.B. Gauß-Algorithmus) festgelegt werden, sondern sich für einen möglichst günstigen Weg entscheiden. Wird der Rechenaufwand zu

*Für Übung und Festigung müssen ggf. weitere Stunden aus dem Freiraum hinzugenommen werden.

Ziele / Inhalte (Sach- und Methodenkompetenz)	Hinweise zu Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
	groß, sollten geeignete Computerprogramme eingesetzt werden. Wenn auch die Behandlung des Gauß-Algorithmus nicht verbindlich ist, wird dennoch empfohlen, exemplarisch einen Einblick in dieses Verfahren zu geben, und zwar unter dem Aspekt, einen Lösungsalgorithmus für Gleichungssysteme zu finden, den man auf den Computer übertragen kann.
3. Vektoren addieren und mit reellen Zahlen multiplizieren	Der Vektorbegriff umfasst hier vor allem Ortsvektoren und Pfeilklassen. Zahlen-n-Tupel werden bei nichtgeometrischen Anwendungen (Lernziel 9) thematisiert. Die angesprochenen Verknüpfungen können im Zusammenhang mit den Abbildungen "Verschiebung" und "Streckung" behandelt werden.
4. Elementare Abbildungen der Ebene mit Hilfe von Vektoren und Matrizen beschreiben	Im Mittelpunkt stehen geeignete Abbildungen aus dem Geometrieunterricht der Sekundarstufe I (z.B. Spiegelungen, Drehung, Verschiebung, zentrische Streckung). In diesem Zusammenhang soll das Produkt Matrix-Vektor eingeführt werden. Zur Motivation und Veranschaulichung des Zusammenhangs zwischen den Abbildungen und den zugehörigen Gleichungen sollte der Computer eingesetzt werden.
5. Zu vorgegebenen Punkten und Vektoren der Ebene die Bildpunkte bzw. die Bildvektoren bestimmen	Es wird empfohlen, je nach Vorkenntnissen der Schülerinnen und Schüler Abbildungen von Figuren mit einer entsprechenden Software zu veranschaulichen oder ein Programm für eine Abbildung zu erstellen.
6. Zu zwei vorgegebenen Abbildungen die Gleichung der verketteten Abbildung aufstellen	In diesem Zusammenhang soll das Produkt zweier Matrizen eingeführt werden. Beim Verketten kann man sich auf Abbildungen mit dem Fixpunkt O beschränken.
7. Zu einer geeignet vorgegebenen Abbildung die Gleichung der Umkehrabbildung bestimmen	In diesem Zusammenhang soll der Begriff der inversen Matrix eingeführt werden.

Ziele / Inhalte (Sach- und Methodenkompetenz)	Hinweise zu Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
8. Exemplarisch Eigenschaften von Kongruenz- oder Ähnlichkeitsabbildungen, die aus der Sekundarstufe I bekannt sind, rechnerisch bestätigen	Es bieten sich an: Invarianten, Fixelemente
9. Mindestens einen Anwendungsbereich von Matrizen kennenlernen	Das Kennenlernen kann erfolgen durch: Schülerreferate, Demonstrationen und Übungen am Rechner, Bearbeitung geeignet ausgewählter Literatur, Einbindung in ein gebiets- bzw. fachübergreifendes Projekt o.ä. In Frage kommen alternativ z.B. folgende Bereiche: ∗ Berechnung der Projektion räumlicher Objekte in eine Bildebene (Computergrafik) ∗ Erzeugung von Fraktalen durch Iteration Aus bekannten elementaren Abbildungen (z.B. zentrische Streckung, Drehung, Spiegelung, Verschiebung) wird ein dem jeweiligen Fraktal (z.B. Sierpinski-Dreieck, Farn, Kristall, Baum, Drachen) entsprechender Operator gebildet, mit dem die Iteration durchgeführt wird. ∗ Tabellen und Listen in der wirtschaftlichen Praxis Beispiele: – Berechnung von Stückzahlen und Kosten – Materialverflechtungen – Innerbetriebliche Verrechnungen – Stücklistenproblem ∗ Beschreibung von mehrstufigen Prozessen durch Übergangsmatrizen Beispiele: – Populationsdynamik – Kaufverhalten – Überwachung von Maschinen – Warteschlangen – Irrfahrtmodelle Empfohlen wird eine Einbeziehung stochastischer Matrizen, weil so ein Bezug zur Wahrscheinlichkeitsrechnung hergestellt werden kann.

Wahlpflichtgebiet 3: Matrizen in praktischen Anwendungen

Zeitrichtwert: 44 Unterrichtsstunden*

Zu dem allen Wahlpflichtgebieten gemeinsamen Fundamentum gehören das Aufstellen und Lösen linearer Gleichungssysteme und eine Einführung in das Arbeiten mit Vektoren. Lineare Gleichungssysteme sind in vielen Bereichen von Wissenschaft, Wirtschaft und Gesellschaft ein unentbehrliches Hilfsmittel zur mathematischen Bewältigung von Sachproblemen; auch viele innermathematische Fragestellungen führen auf lineare Gleichungssysteme.

Im Mittelpunkt dieses Wahlpflichtgebiets steht das Arbeiten mit Matrizen. Dies ist für Schülerinnen und Schüler eines Grundkurses nützlich, weil Matrizen in zahlreichen Berufszweigen und angewandten Wissenschaften zur Modellierung und Lösung von Sachproblemen genutzt werden. Der Schwerpunkt bei diesem Wahlpflichtgebiet liegt auf dem Mathematisieren von Sachproblemen und nicht auf dem Erlernen und Einüben des Matrizenkalküls. Die einzelnen Matrizenoperationen werden anhand konkreter Sachaufgaben, z.B. aus der Industrie oder Wirtschaft, erarbeitet und dann in komplexeren Problemstellungen angewendet.
Es wird empfohlen, das für die Berufspraxis und das Studium so wichtige Lösen von linearen Gleichungssystemen in engem Bezug zu der anwendungsorientierten Erarbeitung der Matrizenoperationen zu behandeln.

Schließlich sollen die Schülerinnen und Schüler an ausgewählten Beispielen erkennen, dass sich Matrizen auch zur Beschreibung geometrischer Abbildungen eignen und so die vielseitige Bedeutung von Matrizen erfahren.

Ziele / Inhalte (Sach- und Methodenkompetenz)	Hinweise zu Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
1. Zu einer geeigneten Problemstellung ein entsprechendes lineares Gleichungssystem aufstellen	Das Aufstellen und Lösen linearer Gleichungssysteme kann anhand von Sachaufgaben, beim Invertieren von Matrizen, aber auch – gebietsübergreifend – im Rahmen der Analysis (Bestimmen einer Funktion aus vorgegebenen Eigenschaften) behandelt werden.
2. Lineare Gleichungssysteme lösen	Die in der Sekundarstufe I behandelten Verfahren werden auf Systeme mit mehr als zwei Gleichungen und mehr als zwei Variablen erweitert. Im Vordergrund stehen 3x3-Sy-steme. Die Schülerinnen und Schüler sollen nicht auf ein bestimmtes Verfahren (z.B. Gauß-Algorithmus) festgelegt werden, sondern sich für einen möglichst günstigen Weg entscheiden.

*Für Übung und Festigung müssen ggf. weitere Stunden aus dem Freiraum hinzugenommen werden.

Ziele / Inhalte (Sach- und Methodenkompetenz)	Hinweise zu Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
	Wird der Rechenaufwand zu groß, sollten geeignete Computerprogramme eingesetzt werden. Wenn auch die Behandlung des Gauß-Algorithmus nicht verbindlich ist, wird dennoch empfohlen, exemplarisch einen Einblick in dieses Verfahren zu geben, und zwar unter dem Aspekt, einen Lösungsalgorithmus für Gleichungssysteme zu finden, den man auf den Computer übertragen kann.
3. Vektoren addieren und mit reellen Zahlen multiplizieren	Der Vektorbegriff umfasst hier vor allem Zahlen-n-Tupel. Ortsvektoren und Pfeilklassen können im Zusammenhang mit den geometrischen Abbildungen (Lernziel 6) behandelt werden.
4. In Sachzusammenhängen folgende Operationen mit Matrizen und Vektoren verstehen und ausführen:	
– Produkt einer Matrix mit einem Vektor	Möglicher Sachbezug: – Tabellen und Listen und deren Verknüpfung; z.B. Berechnungen von Stückzahlen und Kosten
– Produkt zweier Matrizen	Möglicher Sachbezug: – Materialverteilungen, etwa bei einem mehrstufigen Produktionsablauf – Markow-Prozesse; z.B. bei der Untersuchung des Kaufverhaltens von Kunden
– Inverse Matrix	Möglicher Sachbezug: – Umkehrung der Fragestellung beim Verknüpfen von Tabellen und Listen – Innerbetriebliche Verrechnungen – Stücklistenproblem
5. Komplexere Aufgaben aus mindestens zwei Anwendungsfeldern von Matrizen bearbeiten	Beispiele für Anwendungsfelder, die auf komplexere Aufgaben führen:

Ziele / Inhalte (Sach- und Methodenkompetenz)	Hinweise zu Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
	– Input-Output-Analyse – Prozesse, die durch Übergangsmatrizen beschrieben werden können z.B. Populationsentwicklung Warteschlangen Kaufverhalten Maschinenüberwachung Irrfahrtmodelle Dabei sollen auch stationäre Verteilungen und Grenzverteilungen exemplarisch angesprochen werden. Der Schwerpunkt muss auf der Bearbeitung des Sachproblems, nicht auf der Durchführung eines mathematischen Kalküls, liegen (vgl. Problemlösen mit mathematischen Methoden – Modellbildung, Seite 18, Stufe 2). Umfangreiche Rechnungen bei Matrizenoperationen können einem Computer übertragen werden. Zur Untersuchung mehrstufiger Prozesse, die durch eine Verkettung von Matrizen beschrieben werden, können auch geeignete Modellbildungs- und Simulationsprogramme genutzt werden.
6. Erfahren, dass Matrizen auch zur Beschreibung von geometrischen Abbildungen dienen	Hier kann es nicht um eine systematische Einführung in die analytische Abbildungsgeometrie gehen. Die Schülerinnen und Schüler sollen vielmehr exemplarisch erfahren, dass Matrizen und Vektoren auch in der Geometrie eine wichtige Bedeutung zukommt. Dabei sollten auch die behandelten Operationen mit Matrizen geometrisch gedeutet werden (Verkettung von Abbildungen, Umkehrabbildung). Es wird empfohlen, vor allem die Abbildungen zu wählen, die den Schülerinnen und Schülern aus dem Geometrieunterricht der Sekundarstufe I bekannt sind (z.B. Kongruenzabbildungen mit Fixpunkt O oder die zentrische Streckung vom Ursprung aus). An mindestens einem (einfachen) Beispiel sollte auch einmal eine 3x3-Matrix abbildungs-geometrisch interpretiert werden.

Stochastik 1

Zeitrichtwert: 26 Unterrichtsstunden*

Der Themenbereich ist für den Grundkurs von Bedeutung, weil er in besonderer Weise die Möglichkeit bietet, die Beschreibung von Anwendungssituationen durch mathematische Modelle zu üben; dabei sollen auch Grenzen der Modelle erkannt werden.

Zentrales Anliegen des Themenbereichs ist es, die Schülerinnen und Schüler mit Denkweisen und Verfahren der Stochastik vertraut zu machen. Die für alle verbindliche Grundlage bilden der Wahrscheinlichkeitsbegriff und die Binomialverteilung.

Ziele / Inhalte (Sach- und Methodenkompetenz)	Hinweise zu Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
1. Zufallsexperimente durch ihre Ergebnismengen beschreiben	
2. Wahrscheinlichkeiten bestimmen und in Sachzusammenhängen interpretieren	Der Schwerpunkt liegt auf der Entwicklung eines inhaltlichen Verständnisses des Wahrscheinlichkeitsbegriffs. Die Stabilisierung der relativen Häufigkeit soll an Beispielen erfahren werden (empirisches Gesetz der großen Zahlen); die Laplace-Wahrscheinlichkeit wird als Spezialfall behandelt. Zur Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten können systematische Abzählverfahren verwendet werden; eine ausführliche Behandlung kombinatorischer Regeln ist nicht intendiert.
3. Einfache Rechenregeln zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit von Ereignissen anwenden	z.B. Pfadregeln (Summe, Produkt), Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses
4. Die Begriffe “Bernoullikette” und “Binomialverteilung” verstehen und wissen, wie man die Werte einer Binomialverteilung bestimmen kann	Eine explizite Berechnung der Werte der Binomialverteilung soll nur exemplarisch mit wenigen Stufen durchgeführt werden. Die Herleitung der entsprechenden Formel ist nicht gefordert. Beim Lösen von Anwendungsaufgaben werden Tabellen für die Binomialverteilung benutzt. Binomialverteilungen sollen auch grafisch dargestellt werden (Histogramme). Wenn Wahlpflichtgebiet 1 (“Simulation von Zufallsexperimenten”) gewählt wird, sollten Werte der Binomialverteilung auch mit Hilfe der Monte-Carlo-Methoden bestimmt werden.

*Für Übung und Festigung müssen ggf. weitere Stunden aus dem Freiraum hinzugenommen werden.

Ziele / Inhalte (Sach- und Methodenkompetenz)	Hinweise zu Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
5. Sachaufgaben zur Binomialverteilung lösen	Die Schülerinnen und Schüler sollen erfahren, dass viele Zufallsexperimente im täglichen Leben durch eine Binomialverteilung ausreichend gut modelliert werden können.
6. Erwartungswert und Standardabweichung für Binomialverteilungen berechnen und anwenden	Die Formeln sollen anhand von Plausibilitätsbetrachtungen gewonnen werden. Bei der Anwendung in Sachaufgaben kommt es vor allem darauf an, dass die Schülerinnen und Schüler verstehen, welche Folgerungen man aus den Kennwerten für das Sachproblem ziehen kann.

Stochastik 2

Mit Blick auf den Anwendungsaspekt liegt ein weiterer Schwerpunkt des Themenbereichs “Stochastik" entweder auf der Simulation von Zufallsexperimenten mit Hilfe von Zufallszahlen (Monte-Carlo-Methoden) oder auf der beurteilenden Statistik (Testen von Hypothesen oder Bestimmen von Konfidenzintervallen).

Dementsprechend sind im Lehrplan die folgenden **drei Wahlpflichtgebiete** ausgewiesen, von denen **eines verbindlich** zu behandeln ist.

Wahlpflichtgebiet 1: Simulation von Zufallsexperimenten

Zeitrichtwert: 16 Unterrichtsstunden*

Stochastische Simulationen gewinnen in verschiedenen Wissenschaften und Berufsfeldern, vor allem im natur-, sozial- und wirtschaftswissenschaftlichen Bereich, in immer stärkerem Maß an Bedeutung. Schülerinnen und Schüler sollten deshalb Grundelemente dieser Arbeitsmethode kennenlernen und verstehen. Beim Aufstellen von Simulationsalgorithmen erfahren sie in unmittelbarer Weise den Prozess der Modellbildung. Schließlich führt die Anwendung der Monte-Carlo-Methoden zu einem tieferen Verständnis stochastischer Begriffsbildungen und bietet Möglichkeiten experimentellen Arbeitens.

Die im Folgenden aufgeführten Ziele sollen nicht in einer geschlossenen Unterrichtseinheit im Anschluss an die Behandlung der in “Stochastik 1" beschriebenen Inhalte realisiert werden. Da relativ wenige stochastische Vorkenntnisse benötigt werden, können die Simulationen den Lehrgang in Stochastik von Anfang an begleiten und durchdringen.

Stochastische Simulationen gestatten, ein breit gestreutes Feld von Zufallsexperimenten, auch solche, die den Schülerinnen und Schülern rechnerisch nicht mehr zugänglich sind, zu bearbeiten. Dadurch kann auch eine einseitige Beschränkung auf die Binomialverteilung aufgebrochen werden.

Ziele / Inhalte (Sach- und Methodenkompetenz)	Hinweise zu Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
1. Erfahren, dass Zufallszahlen ein universelles Mittel zum Simulieren von Zufallsexperimenten sind	Den Schülerinnen und Schülern soll bewusst werden, dass bei der Simulation von Zufallsexperimenten mit Zufallszahlen die Stabilisierung der relativen Häufigkeit ausgenutzt wird. Für die Durchführung von Simulationen sollten die Zufallszahlen eines Rechners benutzt werden. Erzeugung und Test von Zufallszahlen werden nicht thematisiert.

*Für Übung und Festigung müssen ggf. weitere Stunden aus dem Freiraum hinzugenommen werden.

Ziele / Inhalte (Sach- und Methodenkompetenz)	Hinweise zu Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
2. Vorgegebene Simulationsalgorithmen verstehen, modifizieren und durch Variation von Parametern stochastische Fragestellungen untersuchen	
3. Zu ausgewählten Zufallsexperimenten die wesentlichen Schritte einer Simulation angeben	Die Schritte der Simulation können umgangssprachlich formuliert oder in Form eines Algorithmus notiert werden.
4. In einfachen Fällen Simulationen von Zufallsexperimenten entwerfen, durchführen und die Ergebnisse in dem jeweiligen Sachzusammenhang interpretieren	Die im Grundkurs hierfür angemessene Unterrichtsform ist in der Regel das Unterrichtsgespräch oder die angeleitete Gruppenarbeit. Es sollen zum einen Fragestellungen ausgewählt werden, die im Unterricht auch theoretisch gelöst werden können, z.B. durch Anwendung der Pfadregeln. Dadurch wird das Vertrauen in Simulationsergebnisse gestärkt. Die Schülerinnen und Schüler sollen aber auch exemplarisch erfahren, dass Simulationen einen einfachen Zugang zu Problemen bieten können, die von ihnen theoretisch nur sehr schwer oder gar nicht bearbeitet werden können.

Wahlpflichtgebiet 2: Testen von Hypothesen

Zeitrichtwert: 16 Unterrichtsstunden*

Zentrales Anliegen des Wahlpflichtgebiets “Testen von Hypothesen” ist es, dass die Schülerinnen und Schüler das Verfahren verstehen und zum Lösen von Sachproblemen aus unterschiedlichen Bereichen anwenden. Im Zusammenhang mit der Diskussion von Fehlerwahrscheinlichkeiten erfährt der Wahrscheinlichkeitsbegriff eine Erweiterung und Vertiefung.

Ziele / Inhalte (Sach- und Methodenkompetenz)	Hinweise zu Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
1. Das Vorgehen beim Testen von Hypothesen verstehen	
2. Verstehen, welche Fehlentscheidungen beim Hypothesentest auftreten können und wissen, wie man die Wahrscheinlichkeiten dafür ermittelt	
3. Sachaufgaben zum Testen von Hypothesen lösen und die Ergebnisse interpretieren	Die Sachprobleme werden so vorgegeben, dass sie durch Binomialverteilungen modelliert werden können. Besondere Bedeutung kommt der Interpretation des Ergebnisses eines Hypothesentests zu. Dabei sollen die Schülerinnen und Schüler auch die Grenzen des Verfahrens erkennen. Zumindest einmal sollen die Schülerinnen und Schüler zu einem offen formulierten Sachproblem einen Hypothesentest entwerfen, gesuchte Größen berechnen und die Konsequenzen der Ergebnisse für den Sachverhalt erörtern. Die im Grundkurs hierfür angemessene Unterrichtsform ist in der Regel das Unterrichtsgespräch oder die angeleitete Gruppenarbeit.

*Für Übung und Festigung müssen ggf. weitere Stunden aus dem Freiraum hinzugenommen werden.

Wahlpflichtgebiet 3: Schätzen von Wahrscheinlichkeiten

Zeitrichtwert: 16 Unterrichtsstunden*

Zentrales Anliegen des Wahlpflichtgebiets “Schätzen von Wahrscheinlichkeiten” ist es, dass die Schülerinnen und Schüler das Verfahren zur Bestimmung von Konfidenzintervallen verstehen und zum Lösen von Sachproblemen aus unterschiedlichen Bereichen anwenden. Dabei erfährt der Wahrscheinlichkeitsbegriff eine Erweiterung und Vertiefung.
Als Voraussetzung wird eine Möglichkeit, Wahrscheinlichkeiten einer binomialverteilten Zufallsgröße näherungsweise zu ermitteln, bereitgestellt.

Ziele / Inhalte (Sach- und Methodenkompetenz)	Hinweise zu Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
1. Verstehen, wie man Wahrscheinlichkeiten einer binomialverteilten Zufallsgröße näherungsweise mit Hilfe der Gaußschen Integralfunktion Φ (Standard-Normalverteilung) bestimmt	Die Möglichkeit der Approximation soll anschaulich, z.B. anhand von Histogrammen, einsichtig gemacht werden. Hierfür empfiehlt sich der Einsatz eines geeigneten Computerprogramms. Die Bestimmung der Näherungswerte erfolgt mit Hilfe von Tabellen oder Rechnern.
2. Den Begriff “Konfidenzintervall” verstehen und wissen, wie man ein Konfidenzintervall für eine unbekannte Wahrscheinlichkeit bestimmt	
3. Den Zusammenhang zwischen dem Stichprobenumfang und der Länge des Konfidenzintervalls verstehen	
4. Sachaufgaben zu Konfidenzintervallen lösen und die Ergebnisse interpretieren	

*Für Übung und Festigung müssen ggf. weitere Stunden aus dem Freiraum hinzugenommen werden.

Leistungsfach

Wiederholung von Grundlagen

In der Einführungsphase kann es sich als erforderlich erweisen, gezielt bestimmte Kenntnisse und Fertigkeiten aus der Sekundarstufe I zu wiederholen und wieder verfügbar zu machen. Dies wird vor allem dann der Fall sein, wenn Schülerinnen und Schüler aus verschiedenen Lerngruppen oder mit unterschiedlichem Bildungsgang in einem Kurs zusammenkommen.

Empfohlen wird, die Wiederholung in den laufenden Unterricht zu integrieren und nicht mit dem Auffrischen bekannter Inhalte zu beginnen. Es hat sich bewährt, zu Beginn der Jahrgangsstufe 11 ein Thema zu wählen, das für alle Schülerinnen und Schüler neu ist und deshalb Interesse und Motivation wecken kann.

In bestimmten Fällen kann es aber auch sinnvoll oder notwendig sein, zu Beginn der Jahrgangsstufe 11 Grundlagen für das weitere unterrichtliche Arbeiten bereitzustellen. Bei der Planung einer solchen Wiederholungsphase sollte allerdings folgendes beachtet werden:

* Der Zeitansatz sollte 6 - 8 Unterrichtsstunden nicht überschreiten.

* Der Stoffumfang soll auf ein Minimum beschränkt sein.
  Folgende Inhalte werden empfohlen:
  - Lösen von linearen Gleichungen, quadratischen Gleichungen und linearen Gleichungssystemen mit zwei Variablen
  - Definition des Funktionsbegriffs und Darstellungen von Funktionen
  - Lineare und einfache quadratische Funktionen.

  Die Wiederholung weiterer Funktionsklassen und der Eigenschaften von Funktionen soll erst dann erfolgen, wenn diese im Rahmen weiterführender Untersuchungen (z.B. im Rahmen der Differentialrechnung) angesprochen werden.

Grenzwerte

Zeitrichtwert: 30 Unterrichtsstunden*

Ziel dieses Unterrichtsabschnitts ist es, eine inhaltliche Vorstellung des Grenzwertbegriffs bei den Schülerinnen und Schülern zu wecken, eine ihrer Leistungsfähigkeit angemessene Präzisierung der Definition zu erreichen und sie zu befähigen, Grenzwerte zu bestimmen.

Der Lehrplan ermöglicht verschiedene Zugänge zum Grenzwertbegriff:

> Der häufig gewählte Weg über Zahlenfolgen baut auf Vorkenntnissen aus der Sekundarstufe I auf. An eine extensive Behandlung von Zahlenfolgen und deren Eigenschaften ist nicht gedacht. Da sich rekursive Folgen in besonderer Weise eignen, ein Verständnis des Grenzwertbegriffs zu entwickeln, und ferner Rekursionen in den Anwendungen der Mathematik eine immer größere Bedeutung gewinnen, ist ein Eingehen auf diese Folgen im Unterricht ausdrücklich gefordert.
>
> Der Grenzwertbegriff kann auch anhand reeller Funktionen ohne vorherige Behandlung von Zahlenfolgen erarbeitet werden. Bei diesem Vorgehen wird der Folgengrenzwert zu einem späteren Zeitpunkt in einem geeigneten Zusammenhang, z.B. bei der Betrachtung des Grenzwerts für $x \to x_0$, angesprochen, damit er für Anwendungen und zum weiteren Aufbau der Analysis (etwa für die Einführung der Integralrechnung) zur Verfügung steht.

Im Zusammenhang mit der Reflexion über Grenzprozesse sollen auch historische Aspekte (Ringen um eine Präzisierung grundlegender Begriffe) und philosophische Ausblicke (Erfahrungen mit dem Infiniten) in den Unterricht einbezogen werden.

Ziele / Inhalte (Sach- und Methodenkompetenz)	Hinweise zu Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
1. Die explizite und rekursive Beschreibung von Zahlenfolgen verstehen und Eigenschaften von Zahlenfolgen kennen	Die Schülerinnen und Schüler sollen zu vorgegebenem Bildungsgesetz Folgenglieder bestimmen und umgekehrt in einfacheren Fällen ein Bildungsgesetz angeben können.
2. In einfachen Fällen Monotonie und Beschränktheit von Folgen bzw. reellen Funktionen beweisen	
3. Die Begriffe “Grenzwert einer Folge” und “Grenzwert einer reellen Funktion für $x \to \pm\infty$” verstehen	
4. Den Begriff “Grenzwert einer reellen Funktion für $x \to x_0$” verstehen und zur Beschreibung der lokalen Stetigkeit einer Funktion verwenden	Es empfiehlt sich eine Einführung des Begriffes “Grenzwert für $x \to x_0$” über Folgen. An eine ausführliche Behandlung der Stetigkeit ist nicht gedacht. Im Zusammenhang mit dem Grenzwert für $x \to x_0$ kann auf die Vollständigkeit der reellen Zahlen eingegangen werden.

*Für Übung und Festigung müssen ggf. weitere Stunden aus dem Freiraum hinzugenommen werden.

Ziele / Inhalte (Sach- und Methodenkompetenz)	Hinweise zu Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
5. Die Grenzwertsätze für Summe, Produkt und Quotient von Folgen und reellen Funktionen kennen und einen Grenzwertsatz beweisen	
6. Grenzwerte bestimmen	Im Vordergrund steht die Anwendung der Grenzwertsätze. An einigen Beispielen sollte der Grenzwert unter Rückgriff auf die entsprechende Definition bestätigt werden.

Differentialrechnung

Zeitrichtwert: 45 Unterrichtsstunden*

Ziel dieses Unterrichtsabschnitts ist es, bei den Schülerinnen und Schülern eine anschauliche Vorstellung vom Differentialquotienten aufzubauen, Folgerungen aus der Definition zu ziehen und die gewonnenen Aussagen in verschiedenen Sachbezügen anzuwenden.

Der Differentialquotient kann ausgehend von einer geometrischen Problemstellung (Tangentenproblem) oder von der Frage nach Änderungsraten im Rahmen eines Sachproblems erarbeitet werden. Der Grenzwertbegriff soll dabei eine Anwendung und Vertiefung erfahren. Mit dem Differentialquotienten und der Technik des Ableitens lernen die Schülerinnen und Schüler ein wirkungsvolles Werkzeug kennen, das es gestattet, funktionale Zusammenhänge und deren Eigenschaften in den Anwendungsbereichen Naturwissenschaften, Technik, Umwelt, Wirtschafts- und Sozialwissenschaften zu untersuchen und zu deuten.

Ziele / Inhalte (Sach- und Methodenkompetenz)	Hinweise zu Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
1. Den Begriff “Ableitung an einer Stelle” verstehen	Die Ableitung sollte als Grenzwert von Sekantensteigungen eingeführt werden.
2. Die Ableitung als momentane Änderungsrate interpretieren	Im Hinblick auf die zentrale Bedeutung des Differentialquotienten sollen die Schülerinnen und Schüler auch mindestens eine nichtgeometrische Interpretation kennen.
3. Die Begriffe “differenzierbar” und “Ableitungsfunktion” verstehen	Es sollen auch Beispiele für nicht überall differenzierbare Funktionen betrachtet werden. Ferner soll der Zusammenhang zwischen Differenzierbarkeit und Stetigkeit erkannt werden.

*Für Übung und Festigung müssen ggf. weitere Stunden aus dem Freiraum hinzugenommen werden.

Ziele / Inhalte (Sach- und Methodenkompetenz)	Hinweise zu Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
4. Faktor-, Summen- und Potenzregel kennen und eine der Regeln beweisen	Weitere Ableitungsregeln sollen erst dann behandelt werden, wenn es das entsprechende Funktionenmaterial erforderlich macht.
5. Zu einer vorgegebenen Funktion die Ableitungsfunktion und höhere Ableitungen bestimmen	Zur Ableitung ganzrationaler Funktionen werden die Ableitungsregeln angewendet. Den Schülerinnen und Schülern soll aber auch bewusst werden, dass die Ableitungsfunktion einer nicht-ganzrationalen Funktion nur unter Rückgriff auf den Differentialquotienten bestimmt werden kann.
6. Den Graphen der Ableitungsfunktion zu einem vorgegebenen Funktionsgraphen skizzieren	Der Einsatz eines geeigneten Computerprogramms wird empfohlen, um den Zusammen-hang zwischen den beiden Graphen an unterschiedlichen Funktionen anschaulich erfahrbar zu machen.
7. Notwendige und hinreichende Kriterien für Monotonie und für die Existenz von Extrema und Wendepunkten anschaulich begründen und einzelne Kriterien beweisen	
8. Ganzrationale Funktionen diskutieren	Es genügen einige charakteristische Beispiele. Wenn Funktionsplotprogramme mit speziellen Optionen (z.B. Zoom, Trace) zugelassen werden, müssen die Aufgabenstellungen zur Funktionsuntersuchung dem angepasst sein.
9. Ein Iterationsverfahren zur Nullstellenbestimmung verstehen und anwenden	Es geht vor allem darum, den Prozess der Iteration und den zugrundeliegenden Algorithmus bewusst zu machen. Die Schülerinnen und Schüler sollten auch ein entsprechendes Computerprogramm erstellen oder analysieren und exemplarisch Nullstellen mit dem Programm bestimmen.
10. Funktionsgleichungen ganzrationaler Funktionen aus vorgegebenen Eigenschaften bestimmen	Es genügen einige charakteristische Beispiele.
11. Extremwertaufgaben aus verschiedenen Anwendungsgebieten lösen	

Integralrechnung

Zeitrichtwert: 30 Unterrichtsstunden*

Für den Zugang zur Integralrechnung sind verschiedene methodische Wege möglich. Sie führen u.U. zu verschiedenen Definitionen des bestimmten Integrals. Die folgenden Ziele legen keinen Weg fest. Welche Definition auch gewählt wird, den Schülerinnen und Schülern soll bewusst werden, dass diese Definition die Grundlage für weitere Begründungen und Beweise bildet.

Ziele / Inhalte (Sach- und Methodenkompetenz)	Hinweise zu Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
1. Flächeninhalte unter Funktionsgraphen mit Hilfe von Rechtecksummen bestimmen	
2. Eine Definition des Integralbegriffs verstehen	Wie der Integralbegriff im Unterricht definiert wird, hängt vom gewählten Weg ab. Eigenschaften des Integrals sollen an geeigneten Stellen bewusst gemacht und ggf. mit Hilfe der Definition begründet werden.
3. Faktor-, Summen- und Potenzregel kennen, begründen und zur Berechnung von Integralen anwenden	Diese Regeln können auch vor dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung behandelt werden. Der Beweis der Potenzregel kann in diesem Fall zurückgestellt werden.
4. Die Definitionen von "Integralfunktion" und "Stammfunktion" verstehen	Der Unterschied zwischen Integralfunktion und Stammfunktion soll an geeigneten Beispielen erläutert werden.
5. Den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und dessen Beweis verstehen	Die Integrationsregeln sollen mit Hilfe des Hauptsatzes begründet bzw. bestätigt werden.
6. Integrale mit Hilfe von Stammfunktionen berechnen	
7. Ein numerisches Verfahren zur Berechnung von Integralen verstehen	Es genügt, wenn das Rechteckverfahren als Algorithmus dargestellt wird. Eine Übertragung auf einen Rechner ist wünschenswert.

*Für Übung und Festigung müssen ggf. weitere Stunden aus dem Freiraum hinzugenommen werden.

Ziele / Inhalte (Sach- und Methodenkompetenz)	Hinweise zu Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
8. Sachaufgaben, die auf Integrale führen, lösen	Die Anwendungsaufgaben dürfen sich nicht auf Flächenberechnungen beschränken. Beispiele: – Arbeit aus Kraft und Weg – Weg aus Geschwindigkeit und Zeit – Volumen aus Strömungsstärke und Zeit – Volumen von Rotationskörpern – Bogenlänge Die Schülerinnen und Schüler sollen erfahren, dass die Integralrechnung allgemein bei Problemen angewendet werden kann, zu deren Lösung der Grenzwert einer Summe von Produkten bestimmt werden muss.

Weiterführung der Differential- und Integralrechnung

Zeitrichtwert: 60 Unterrichtsstunden*

In den vorangegangenen Themenblöcken zur Analysis war es ein zentrales Anliegen, die Schülerinnen und Schüler mit den Denkweisen und den grundlegenden Verfahren der Differential- und Integralrechnung vertraut zu machen. In diesem Abschnitt werden weitere Ableitungs- und Integrationsregeln bereitgestellt und die Methoden der Infinitesimalrechnung auf ein erweitertes Funktionenmaterial angewendet.
Differentialgleichungen sollen im Unterricht wegen des weitverzweigten Anwendungsbezugs nicht zu knapp behandelt werden. Dennoch ist ein exemplarisches, auf grundsätzliches Verständnis zielendes Vorgehen intendiert; an eine systematische Behandlung ist nicht gedacht. Die numerischen Lösungsverfahren haben durch den Computer eine immer größere Bedeutung erlangt. Daher sollen die Schülerinnen und Schüler auch ein einfaches numerisches Verfahren kennenlernen.
Die Ziele zur Exponential- und Logarithmusfunktion können auf verschiedenen didaktischen Wegen realisiert werden. Die Formulierung der Ziele hält eine Entscheidung offen, welcher Weg gewählt wird. Die Anordnung der Ziele soll auch hier keine Reihenfolge im Sinne eines Lehrgangs festlegen.

Ziele / Inhalte (Sach- und Methodenkompetenz)	Hinweise zu Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
1. Produkt-, Quotienten- und Kettenregel anwenden und eine der Regeln beweisen	
2. Gebrochen-rationale Funktionen diskutieren	Es genügen einige charakteristische Beispiele. Wenn Funktionsplotprogramme mit speziellen Optionen (z. B. Zoom, Trace) zugelassen werden, müssen die Aufgabenstellungen zur Funktionsuntersuchung dem angepasst sein.
3. Die Ableitungen von Sinus, Kosinus und Tangens kennen, anwenden und die Herleitung verstehen	
4. Eine Definition der Eulerschen Zahl e kennen	
5. Die Ableitung der e-Funktion kennen und begründen	
6. Den Zusammenhang zwischen den Funktionen $\ln x$ und $\frac{1}{x}$ kennen und die entsprechenden Beweise verstehen	

*Für Übung und Festigung müssen ggf. weitere Stunden aus dem Freiraum hinzugenommen werden.

Ziele / Inhalte (Sach- und Methodenkompetenz)	Hinweise zu Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
7. Exponentialfunktionen ableiten	Der Zusammenhang zwischen einer allgemeinen Exponentialfunktion und der e-Funktion sollte hier bewusst gemacht und angewendet werden.
8. Sachaufgaben, die auf Exponentialfunktionen und ihre Ableitungen führen, lösen	Auf Idealisierungen bei der Annahme exponentiellen Wachstums bzw. Zerfalls soll im Rahmen der vorgelegten Probleme besonders eingegangen werden (Modellbildung). Im Rahmen des pädagogischen Freiraums können in diesem Zusammenhang auch lineare und logistische Wachstumsprozesse betrachtet werden.
9. Die Verfahren der Integration durch Substitution und der partiellen Integration anwenden	Der Zusammenhang mit der Produkt- und Kettenregel der Differentialrechnung soll aufgezeigt werden. Obwohl in den naturwissenschaftlich-technischen Studiengängen nach wie vor Grundfertigkeiten auf diesem Gebiet erwartet werden, ist eine Beschränkung auf einfache Fälle angezeigt.
10. Beispiele für Differentialgleichungen und deren Lösung angeben und erklären	Beispiele, die sich aus dem Unterricht ergeben können, sind Wachstumsvorgänge (exponentiell, beschränkt, logistisch) und Schwingungsvorgänge.
11. Einfache Differentialgleichungen lösen	Die Lösungen der Differentialgleichungen sollten (evtl. nach einer einfachen Separation oder Substitution) durch direktes Integrieren ermittelt werden können. Auf keinen Fall sollen Fertigkeiten im Lösen von Differentialgleichungen systematisch trainiert werden; vielmehr ist eine exemplarische, auf grundsätzliches Verständnis zielende Behandlung intendiert.
12. Ein numerisches Lösungsverfahren für Differentialgleichungen kennen	Hier soll ein Bezug zu bereits behandelten Näherungsverfahren hergestellt werden. Es geht vor allem darum, den zugrunde liegenden Algorithmus bewusst zu machen. Exemplarisch soll auch eine rechnerische Umsetzung erfolgen und die Lösung grafisch dargestellt werden.

Lineare Algebra/Analytische Geometrie

Zum Themenbereich Lineare Algebra/Analytische Geometrie wird in der Fachdidaktik eine Vielzahl sehr unterschiedlicher algebraischer und geometrischer Inhalte gezählt, die auf vielfältige Weise zueinander in Beziehung stehen und miteinander verflochten sind, zum Beispiel: Untersuchung geometrischer Gebilde im Raum, affine Abbildungen, Matrizen und Vektoren in Anwendungen, Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme. Alle diese Aspekte und ihre gegenseitigen Bezüge im Unterricht thematisieren zu wollen, würde bei weitem den zeitlichen Rahmen übersteigen, der für den Themenbereich Lineare Algebra/Analytische Geometrie zur Verfügung steht. Andererseits würde es eine unnötige Einengung bedeuten, die Lehrerinnen und Lehrer auf *eine* bestimmte didaktische und inhaltliche Schwerpunktsetzung festzulegen.

Um den Lehrerinnen und Lehrern einen möglichst großen Spielraum für didaktische Entscheidungen einzuräumen, werden **drei Wahlpflichtgebiete** angeboten. Allen gemeinsam ist ein Grundbestand an algebraischen und geometrischen Inhalten und Verfahren. Jedoch wird in jedem Wahlpflichtgebiet ein anderer Schwerpunkt gesetzt, was auch Unterschiede bei der Stoffauswahl nach sich zieht. In den Vorbemerkungen zu den Wahlpflichtgebieten sind die jeweiligen didaktischen Intentionen dargestellt.

In jedem Kurs muss **eines** der drei Wahlpflichtgebiete **vollständig** behandelt werden. Über die Inhalte des ausgewählten Wahlpflichtgebiets hinaus können weitere Themen zusätzlich im Rahmen des pädagogischen Freiraums angesprochen werden.

Wahlpflichtgebiet 1: Vektorielle analytische Geometrie

Zeitrichtwert: 75 Unterrichtsstunden*

Zu dem allen Wahlpflichtgebieten gemeinsamen Fundamentum gehören das Aufstellen und Lösen linearer Gleichungssysteme und eine Einführung in das Arbeiten mit Vektoren.
Lineare Gleichungssysteme sind in vielen Bereichen von Wissenschaft, Wirtschaft und Gesellschaft ein unentbehrliches Hilfsmittel zur mathematischen Bewältigung von Sachproblemen; auch viele innermathematische Fragestellungen führen auf lineare Gleichungssysteme. In diesem Wahlpflichtgebiet werden Fähigkeiten im Lösen von linearen Gleichungssystemen und Interpretieren von Lösungen, auch bei unter- oder überbestimmten Systemen, vor allem dazu benötigt, Lagebeziehungen zwischen Geraden und Ebenen analytisch zu erklären. Darüber hinaus sollen auch Anwendungsaufgaben aus verschiedenen Sachgebieten, die auf lineare Gleichungssysteme führen, gelöst werden.

Im Mittelpunkt dieses Wahlpflichtgebiets “Vektorielle analytische Geometrie” stehen die Anwendung vektorieller Methoden zur Bearbeitung geometrischer Fragestellungen und, entsprechend der Zielsetzung des Leistungskurses, zum Beweis geometrischer Sätze. Hinzu kommt das Ziel, das räumliche Vorstellungsvermögen der Schülerinnen und Schüler durch Zeichnen von Geraden und Ebenen zu fördern.

Schließlich werden, ausgehend von den Pfeilklassen, über Zahlen-n-Tupel grundlegende Begriffe der Vektoralgebra verallgemeinert und exemplarisch der Abstraktionsprozess zum allgemeinen Vektorraum bewusst gemacht.

Ziele / Inhalte (Sach- und Methodenkompetenz)	Hinweise zu Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
Lineare Gleichungssysteme	
1. Zu einer geeigneten Problemstellung ein entsprechendes lineares Gleichungssystem aufstellen	Das Aufstellen und Lösen linearer Gleichungssysteme kann anhand von Sachaufgaben, bei der Untersuchung der gegenseitigen Lage von Geraden und Ebenen, aber auch - gebietsübergreifend - im Rahmen der Analysis (Bestimmen einer Funktion aus vorgegebenen Eigenschaften) behandelt werden.
2. Lineare Gleichungssysteme lösen	Die in der Sekundarstufe I behandelten Verfahren werden auf Systeme mit mehr als zwei Gleichungen und mehr als zwei Variablen erweitert. Im Vordergrund stehen 3x3-Systeme. Die Schülerinnen und Schüler sollen nicht auf ein bestimmtes Verfahren (z.B. Gauß-Algorithmus) festgelegt werden, sondern sich für einen möglichst günstigen Weg entscheiden. Wird der Rechenaufwand zu groß, sollten geeignete Computerprogramme eingesetzt werden.

*Für Übung und Festigung müssen ggf. weitere Stunden aus dem Freiraum hinzugenommen werden.

Ziele / Inhalte (Sach- und Methodenkompetenz)	Hinweise zu Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
3. Das Gauß-Verfahren als Beispiel für eine algorithmische Problemlösung verstehen	Der Gauß-Algorithmus wird nicht als ein weiteres Verfahren eingeführt, mit dem die Schülerinnen und Schüler Gleichungssysteme lösen sollen. Im Vordergrund steht vielmehr das Bewusstmachen eines Algorithmus, der so beschaffen ist, dass man ihn auf den Computer übertragen kann.
4. Lösungsmengen von linearen Gleichungssystemen mit mehr als einer Lösung angeben und interpretieren	Es sollen unterschiedliche Themenbereiche angesprochen werden; z.B. Sachprobleme, Geometrie (Parametergleichung der Geraden bzw. der Ebene; Lagebeziehungen), Analysis (Bestimmung von Funktionen aus vorgegebenen Eigenschaften → Kurvenscharen).
Vektoralgebra	
5. Vektoren addieren und mit reellen Zahlen multiplizieren	Der Vektorbegriff umfasst hier Ortsvektoren, Pfeilklassen und Zahlentripel/-paare.
6. Die Begriffe "Linearkombination" und "linear abhängig/unabhängig" verstehen und anwenden	
7. Definition und Eigenschaften des Skalarprodukts verstehen	Geometrische Vektoren stehen im Vordergrund. Die Einführung kann auch nach der Behandlung der Lagebeziehungen erfolgen.
8. Geeignete elementargeometrische Sätze mit vektoriellen Methoden beweisen	Hier sollen vor allem die lineare Abhängigkeit/Unabhängigkeit und das Skalarprodukt angewendet werden.
Analytische Geometrie	
9. Die Parameterform der Geraden- und Ebenengleichung verstehen	Ausgangspunkt kann die geometrische Interpretation unterbestimmter Systeme sein.
10. Die gegenseitige Lage von Geraden und Ebenen im Raum bestimmen und die Verfahren begründen	Es sollen die Fälle "Gerade – Gerade", "Gerade – Ebene" und "Ebene – Ebene" behandelt werden.

Ziele / Inhalte (Sach- und Methodenkompetenz)	Hinweise zu Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
11. Die gegenseitige Lage gegebener Geraden und Ebenen durch Zeichnen in ein Koordinatensystem veranschaulichen	Die Schülerinnen und Schüler sollen erkennen, dass das Markieren von Spurpunkten und Spurgeraden sowie das Beachten verdeckter Punkte und Linien den räumlichen Eindruck wesentlich verbessern. Zur Motivation und zur Unterstützung der Raumanschauung empfiehlt sich der Einsatz von Unterrichtssoftware, die Geraden und Ebenen im Koordinatensystem darstellt.
12. Die allgemeine und die Hessesche Normalenform der Ebenengleichung herleiten und anwenden	
13. Winkel und Abstände im Raum berechnen	
14. Die Kreis- und Kugelgleichung herleiten und zur Untersuchung von Lagebeziehungen anwenden	
15. Definition und Eigenschaften des Vektorprodukts kennen und anwenden	
Ausblick auf den Vektorraum	
16. Die Menge der Pfeilklassen und die Menge der Zahlen-n-Tupel als Beispiele für einen Vektorraum verstehen	
17. Die allgemeine Definition der linearen Abhängigkeit/Unabhängigkeit am Beispiel des $\mathbb{R}^n$ erläutern	Die am konkreten Modell der Pfeilklassen gewonnenen Begriffe sollen präzisiert und auf den $\mathbb{R}^n$ erweitert werden.
18. Die Begriffe “Erzeugendensystem”, “Basis”, “Dimension” eines Vektorraums verstehen	Nach Möglichkeit sollten auch andere Vektorräume angesprochen werden.

Wahlpflichtgebiet 2: Vektoren und Matrizen

Zeitrichtwert: 75 Unterrichtsstunden*

Zu dem allen Wahlpflichtgebieten gemeinsamen Fundamentum gehören das Aufstellen und Lösen linearer Gleichungssysteme und eine Einführung in das Arbeiten mit Vektoren.
Lineare Gleichungssysteme sind in vielen Bereichen von Wissenschaft, Wirtschaft und Gesellschaft ein unentbehrliches Hilfsmittel zur mathematischen Bewältigung von Sachproblemen; auch viele innermathematische Fragestellungen führen auf lineare Gleichungssysteme. Der Schwerpunkt des Unterrichts zu diesem Thema liegt auf Anwendungsaufgaben. Darüber hinaus soll aber auch das für die Berufspraxis und das Studium vieler Fachrichtungen so wichtige Verständnis für Fragen der Lösbarkeit von Gleichungssystemen vertieft werden.

Im Mittelpunkt dieses Wahlpflichtgebiets steht die Anwendung von Matrizen in sehr unterschiedlichen Bereichen. Es werden zwei gleichrangige Schwerpunkte gesetzt:
- Untersuchung affiner Abbildungen und ihrer Eigenschaften
- Mathematisierung und Lösung von nichtgeometrischen Sachproblemen.

Ein dem Leistungskurs angemessenes Anforderungsniveau wird dadurch erreicht, dass einerseits Eigenschaften der Abbildungen bewiesen und die affinen Abbildungen nach verschiedenen Gesichtspunkten (Invarianten, Fixelemente) untersucht werden, andererseits bei den Sachproblemen der Prozess der Modellbildung herausgestellt wird.

Ziele / Inhalte (Sach- und Methodenkompetenz)	Hinweise zu Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
Lineare Gleichungssysteme	
1. Zu einer geeigneten Problemstellung ein entsprechendes lineares Gleichungssystem aufstellen	Das Aufstellen und Lösen linearer Gleichungssysteme kann anhand von Sachaufgaben, aber auch – gebietsübergreifend – im Rahmen der Analysis (Bestimmen einer Funktion aus vorgegebenen Eigenschaften) behandelt werden.
2. Lineare Gleichungssysteme lösen	Die in der Sekundarstufe I behandelten Verfahren werden auf Systeme mit mehr als zwei Gleichungen und mehr als zwei Variablen erweitert. Im Vordergrund stehen 3x3-Systeme. Die Schülerinnen und Schüler sollen nicht auf ein bestimmtes Verfahren (z.B. Gauß-Algorithmus) festgelegt werden, sondern sich für einen möglichst günstigen Weg entscheiden. Wird der Rechenaufwand zu groß, sollten geeignete Computerprogramme eingesetzt werden.

*Für Übung und Festigung müssen ggf. weitere Stunden aus dem Freiraum hinzugenommen werden.

Ziele / Inhalte (Sach- und Methodenkompetenz)	Hinweise zu Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
3. Das Gauß-Verfahren als Beispiel für eine algorithmische Problemlösung verstehen	Der Gauß-Algorithmus wird nicht als ein weiteres Verfahren eingeführt, mit dem die Schülerinnen und Schüler Gleichungssysteme lösen sollen. Im Vordergrund steht vielmehr das Bewusstmachen eines Algorithmus, der so beschaffen ist, dass man ihn auf den Computer übertragen kann.
4. Lösungsmengen von linearen Gleichungssystemen mit mehr als einer Lösung angeben und interpretieren	Neben Sachaufgaben sollen auch Beispiele aus anderen Gebieten, z.B. Analysis (Bestimmung von Funktionen aus vorgegebenen Eigenschaften $\rightarrow$ Kurvenscharen) herangezogen werden.
Vektoralgebra	
5. Vektoren addieren und mit reellen Zahlen multiplizieren	Der Vektorbegriff umfasst hier Ortsvektoren, Pfeilklassen und Zahlen-n-Tupel.
6. Die Begriffe “Linearkombination” und “linear abhängig/unabhängig” verstehen und anwenden	
7. Definition und Eigenschaften des Skalarprodukts verstehen	Geometrische Vektoren stehen im Vordergrund.
8. Geeignete elementargeometrische Sätze mit vektoriellen Methoden beweisen	Hier sollen vor allem die lineare Abhängigkeit/Unabhängigkeit und das Skalarprodukt angewendet werden.
Matrizen	
9. Folgende Operationen mit Matrizen und Vektoren verstehen und sowohl im Zusammenhang mit Abbildungen als auch in nichtgeometrischen Sachbezügen anwenden: – Produkt einer Matrix mit einem Vektor	Im Folgenden sind jeweils mögliche Fragestellungen a) aus der Abbildungsgeometrie b) aus nichtgeometrischen Zusammenhängen angegeben. Zu a) Berechnen von Bildpunkten bei einer vorgegebenen Abbildung Zu b) Verknüpfen von Tabellen und Listen; z.B. Berechnungen von Stückzahlen und Kosten

Ziele / Inhalte (Sach- und Methodenkompetenz)	Hinweise zu Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
– Produkt zweier Matrizen, Matrizenpotenzen	Zu a) Verketten von Abbildungen Zu b) Materialverflechtungen, etwa bei einem mehrstufigen Produktionsablauf Markow-Prozesse; z.B. bei der Untersuchung des Kaufverhaltens von Kunden
– Inverse Matrix	Zu a) Bestimmen der Umkehrabbildung zu einer gegebenen Abbildung Zu b) Umkehrung der Fragestellung beim Verknüpfen von Tabellen und Listen Innerbetriebliche Verrechnungen In diesem Zusammenhang sollen Kenntnisse und Fertigkeiten im Umgang mit linearen Gleichungssystemen aufgefrischt und vertieft werden.
10. Die allgemeine Matrix-Vektor-Gleichung einer affinen Abbildung verstehen	Dabei soll auch die Tatsache, dass bei Abbildungen der Form $\vec{x}' = A \cdot \vec{x}$ die Spalten der Abbildungsmatrix A die Bilder der Einheitsvektoren sind, geometrisch interpretiert werden.
11. Eigenschaften der affinen Abbildungen beweisen	Es bieten sich an: Invarianten, Fixelemente.
12. Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildungen als spezielle affine Abbildungen verstehen	In diesem Zusammenhang soll auf die Invarianten der angesprochenen Abbildungen zurückgegriffen werden.
13. Affine Abbildungen nach ihren Fixelementen untersuchen	In diesem Zusammenhang können auch Eigenschaften der Achsenaffinitäten (perspektiven Affinitäten) einer genaueren Analyse unterzogen werden.

Ziele / Inhalte (Sach- und Methodenkompetenz)	Hinweise zu Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
14. In mindestens einem nichtgeometrischen Anwendungsfeld von Matrizen Sachaufgaben lösen	Beispiele für Anwendungsfelder: – Stücklistenproblem, Input-Output-Analyse – Prozesse, die durch Übergangsmatrizen beschrieben werden können (z.B. Populationsentwicklung, Warteschlangen, Kaufverhalten, Maschinenüberwachung, Irrfahrtmodelle). In diesem Zusammenhang soll auch auf stationäre Verteilungen und Grenzverteilungen eingegangen werden. Folgende gebietsübergreifenden Bezüge können ggf. bewusst gemacht werden: Stochastische Matrizen $\leftrightarrow$ Stochastik Grenzverteilung $\leftrightarrow$ Analysis Umfangreiche Rechnungen bei Matrizenoperationen und beim Lösen von Gleichungssystemen können einem Computer übertragen werden.

Wahlpflichtgebiet 3 : Vektorräume und lineare Abbildungen - Anwendungen

Zeitrichtwert: 75 Unterrichtsstunden*

Exakte Begriffsbildungen und Beweise spielen eine zentrale Rolle im Aufbau der Mathematik als Wissenschaft. Schülerinnen und Schüler eines Leistungskurses Mathematik werden zu einem großen Teil im Studium (auch in nichtmathematischen Fachrichtungen) der Wissenschaft Mathematik in einer relativ abstrakten und strengen Form begegnen. Das Wahlpflichtgebiet 3 soll einerseits darauf vorbereiten, indem zentrale Begriffe der linearen Algebra in der allgemeinen Form eingeführt werden und die in der Sekundarstufe I begonnene Heranführung an das exakte Definieren und Beweisen bis hin zu einem angemessenen Niveau fortgesetzt wird. Andererseits soll aber auch am Beispiel der linearen Algebra verdeutlicht werden, dass die Mathematik als Wissenschaft nicht nur aus formalem Operieren auf abstrakten Begriffen besteht, sondern dass ihre Begriffe und Methoden in vielfältiger Weise einsetzbar sind und Ergebnisse liefern, deren Interpretation wichtige Erkenntnisse im Anwendungszusammenhang geben kann.

Zu dem allen Wahlpflichtgebieten gemeinsamen Fundamentum gehören das Aufstellen und Lösen linearer Gleichungssysteme und eine Einführung in das Arbeiten mit Vektoren.
Im Mittelpunkt dieses Wahlpflichtgebiets stehen der Vektorraumbegriff und die linearen Abbildungen. Die in diesen Zusammenhängen auftretenden grundlegenden Begriffe der linearen Algebra sollen ausgehend von bekannten Inhalten (z.B. geometrische Vektoren, lineare Gleichungssysteme) entwickelt werden. Die Übertragung auf allgemeine Vektorräume und lineare Abbildungen führt dann zur Loslösung von der Anschauung und ermöglicht abstrakte Begriffsbildungen.

An den Begriffen “Vektorraum” und “lineare Abbildungen” sollen die Schülerinnen und Schüler beispielhaft erkennen, dass sich mit Strukturbetrachtungen unterschiedliche Bereiche auf das algebraisch Wesentliche reduzieren lassen. In einer Zeit der Wissensexplosion kann durch das Erkennen gemeinsamer Strukturen in einer Vielzahl konkreter Objekte ein Lernen in Zusammenhängen ermöglicht werden. Insofern liefert dieses Thema im Sinne einer Wissenschaftspropädeutik einen wesentlichen Beitrag zum Methodenlernen und fördert insbesondere die Fähigkeit zu abstrahieren.

Ziele / Inhalte (Sach- und Methodenkompetenz)	Hinweise zu Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
Lineare Gleichungssysteme	
1. Zu einer geeigneten Problemstellung ein entsprechendes lineares Gleichungssystem aufstellen	Das Aufstellen und Lösen linearer Gleichungssysteme kann anhand von Sachaufgaben, aber auch – gebietsübergreifend – im Rahmen der Analysis (Bestimmen einer Funktion aus vorgegebenen Eigenschaften) behandelt werden.

*Für Übung und Festigung müssen ggf. weitere Stunden aus dem Freiraum hinzugenommen werden.

Ziele / Inhalte (Sach- und Methodenkompetenz)	Hinweise zu Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
2. Lineare Gleichungssysteme lösen	Die in der Sekundarstufe I behandelten Verfahren werden auf Systeme mit mehr als zwei Gleichungen und mehr als zwei Variablen erweitert. Im Vordergrund stehen 3x3-Systeme. Die Schülerinnen und Schüler sollen nicht auf ein bestimmtes Verfahren (z.B. Gauß-Algorithmus) festgelegt werden, sondern sich für einen möglichst günstigen Weg entscheiden. Wird der Rechenaufwand zu groß, sollten geeignete Computerprogramme eingesetzt werden.
3. Das Gauß-Verfahren als Beispiel für eine algorithmische Problemlösung verstehen	Der Gauß-Algorithmus wird nicht als ein weiteres Verfahren eingeführt, mit dem die Schülerinnen und Schüler Gleichungssysteme lösen sollen. Im Vordergrund steht vielmehr das Bewusstmachen eines Algorithmus, der so beschaffen ist, dass man ihn auf den Computer übertragen kann.
4. Lösungsmengen von linearen Gleichungssystemen mit mehr als einer Lösung angeben und interpretieren	Neben Sachaufgaben sollen auch Beispiele aus anderen Gebieten, z.B. Analysis (Bestimmung von Funktionen aus vorgegebenen Eigenschaften $\rightarrow$ Kurvenscharen) herangezogen werden.
5. Kriterien dafür, dass ein lineares Gleichungssystem keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen hat, angeben und beweisen	
Vektoralgebra	
6. Vektoren addieren und mit reellen Zahlen multiplizieren	Der Vektorbegriff umfasst hier Ortsvektoren und Pfeilklassen.
7. Die Begriffe “Linearkombination” und “linear abhängig/unabhängig” verstehen und anwenden	
8. Definition und Eigenschaften des Skalarprodukts verstehen	
9. Geeignete elementargeometrische Sätze mit vektoriellen Methoden beweisen	Hier sollen vor allem die lineare Abhängigkeit/Unabhängigkeit und das Skalarprodukt angewendet werden.

Ziele / Inhalte (Sach- und Methodenkompetenz)	Hinweise zu Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
Vektorräume	
10. Die Definition des reellen Vektorraums kennen und Beispiele für Vektorräume angeben	Die Definition des reellen Vektorraums kann auf verschiedene Arten vorbereitet und motiviert werden: – Anknüpfend an die Einführung in die Vektoralgebra können die Vektorraumaxiome an den Beispielen “Ortsvektorraum” bzw. “Translationsvektorraum” plausibel gemacht werden. – Ausgehend von bekannten Zahlenverknüpfungen wird der Verknüpfungsbegriff verallgemeinert. Die Gruppen- und Vektorraumaxiome werden dann als sinnvolle Festlegungen bewusst gemacht. – Ausgehend von den Lösungen linearer Gleichungssysteme und Betrachtungen zur Struktur der Lösungsmenge homogener Systeme werden die Vektorraumaxiome zunächst als Eigenschaften der Lösungsmenge interpretiert. Zur Verdeutlichung des Strukturaspekts sollen auch nichtgeometrische Vektorraummodelle betrachtet werden.
11. Einfache Folgerungen aus den Vektorraumaxiomen beweisen	z.B. $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$, $r \cdot \vec{0} = \vec{0}$; Untervektorraumkriterium
12. Die Begriffe “Lineare Abhängigkeit/Unabhängigkeit”, “Erzeugendensystem”, “Basis” und “Dimension” verstehen und einfache Folgerungen aus den Definitionen beweisen	Die Anwendung der in der Vektoralgebra gewonnenen Begriffe auf nichtgeometrische Vektorraummodelle führt zur Loslösung von der geometrischen Anschauung und zur allgemeinen Definition.
13. Erkennen und beweisen, dass die Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems ein Vektorraum ist und die Begriffe “linear abhängig/unabhängig”, “Basis” und “Dimension” darauf anwenden	Die Schülerinnen und Schüler sollen erfahren, dass die Lösung eines inhomogenen Systems keinen Vektorraum bilden.
14. Den Zusammenhang zwischen der Lösungsmenge eines inhomogenen linearen Gleichungssystems und der Lösungsmenge des zugehörigen homogenen Systems erkennen und beweisen	

Ziele / Inhalte (Sach- und Methodenkompetenz)	Hinweise zu Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
Lineare Abbildungen	
15. Vektoren des $\mathbb{R}^n$ durch Multiplikation mit einer Matrix abbilden und zeigen, dass die Linearitätseigenschaften erfüllt sind	Anwendungen: – geometrische Vektoren und Abbildungen – Listen und Tabellen – Zustandsvektoren und Übergangsmatrizen Es soll auch bewusst gemacht werden, dass die Spalten der Abbildungsmatrix die Bilder der Einheitsvektoren sind.
16. Die Definition der linearen Abbildung kennen und einfache Folgerungen aus den Linearitätseigenschaften beweisen	Beispiele: – $\varphi(\vec{0}) = \vec{0}$; $\varphi(\vec{a} - \vec{b}) = \varphi(\vec{a}) - \varphi(\vec{b})$; – Ist W Untervektorraum des Vektorraums V, so ist φ(W) Untervektorraum von φ(V). – Eine lineare Abbildung ist durch die Bilder einer Basis eindeutig festgelegt. – Die Bilder linear abhängiger Vektoren sind stets linear abhängig. Gebietsübergreifender Aspekt: Integration und Differentiation als lineare Abbildungen in Funktionenräumen
17. Eigenvektoren einer linearen Abbildung bestimmen und in entsprechenden Sachzusammenhängen deuten	Beispiele: – geometrische Abbildungen → Fixgeraden – Übergangsmatrizen → stationäre Verteilungen
18. Den Kern einer linearen Abbildung angeben und Folgerungen für die lineare Abbildung ziehen	Beispiele: – Umkehrbarkeit einer linearen Abbildung; inverse Matrix – Der Kern einer linearen Abbildung ist ein Untervektorraum. – Deutung des Kerns einer geometrischen Abbildung (z.B. bei Projektionen) – Satz über die Dimensionen von Kern und Bild einer linearen Abbildung, Bezug zu den Lösbarkeitskriterien linearer Gleichungssysteme

Stochastik

Zeitrichtwert: 70 Unterrichtsstunden*

Zentrales Anliegen dieses Themenbereichs ist es, die Schülerinnen und Schüler mit Denkweisen und Verfahren der Stochastik vertraut zu machen. Dabei steht auch im Leistungskurs der Anwendungsbezug und nicht der Aufbau einer mathematischen Theorie im Mittelpunkt.

Mathematische Grundlage und zugleich erster Schwerpunkt sind der Wahrscheinlichkeitsbegriff und, darauf aufbauend, Wahrscheinlichkeitsverteilungen von Zufallsgrößen. Dabei beschränkt sich der Lehrgang auf diskrete Zufallsgrößen; im Mittelpunkt steht die Binomialverteilung.

Bei der Planung und Durchführung von Simulationen mit Hilfe von Zufallszahlen (Monte-Carlo-Methoden) erfahren die Schülerinnen und Schüler die Bedeutung dieser Arbeitsmethode, die in verschiedenen Studiengängen und Berufsfeldern eine zunehmend größere Rolle spielt.

Ein weiterer Schwerpunkt liegt auf Fragestellungen aus der beurteilenden Statistik. Dem Testen von Hypothesen und dem Bestimmen von Konfidenzintervallen für unbekannte Wahrscheinlichkeiten muss im Unterricht ausreichend Zeit eingeräumt werden. Es ist ein wichtiges Anliegen, dass die Schülerinnen und Schüler diese Verfahren nicht nur verstehen, sondern auch selbständig zum Lösen von Sachproblemen anwenden.

Ziele / Inhalte (Sach- und Methodenkompetenz)	Hinweise zu Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
1. Zufallsexperimente durch ihre Ergebnismengen beschreiben.	
2. Wahrscheinlichkeiten bestimmen und in Sachzusammenhängen interpretieren	Der Schwerpunkt liegt auf der Entwicklung eines inhaltlichen Verständnisses des Wahrscheinlichkeitsbegriffs. Die Stabilisierung der relativen Häufigkeit soll an Beispielen erfahren werden (empirisches Gesetz der großen Zahlen); die Laplace-Wahrscheinlichkeit wird als Spezialfall behandelt. Zur Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten können systematische Abzählverfahren verwendet werden; eine ausführliche Behandlung kombinatorischer Regeln ist nicht intendiert.
3. Rechenregeln zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen begründen und anwenden	z.B. Pfadregeln (Summe, Produkt), Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses, Wahrscheinlichkeit der Vereinigungsmenge von Ereignissen

*Für Übung und Festigung müssen ggf. weitere Stunden aus dem Freiraum hinzugenommen werden.

Ziele / Inhalte (Sach- und Methodenkompetenz)	Hinweise zu Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
4. Zufallsexperimente mit Hilfe von Zufallszahlen simulieren und die Ergebnisse der Simulation interpretieren	Für die Durchführung der Simulationen sollte der Computer benutzt werden. Die Schülerinnen und Schüler sollen erfahren, dass Simulationen dort sinnvoll eingesetzt werden, wo eine wahrscheinlichkeitstheoretische Lösung nicht möglich oder zu komplex ist. Im Unterricht können durch Simulationen auch wahrscheinlichkeitstheoretische Aussagen und Formeln vorbereitet oder bestätigt werden.
5. Die Begriffe “bedingte Wahrscheinlichkeit” und “Unabhängigkeit zweier Ereignisse” kennen und anwenden	Im Rahmen des pädagogischen Freiraums sollte in diesem Zusammenhang auch der Satz von Bayes behandelt werden.
6. Die Begriffe “Zufallsgröße” und “Wahrscheinlichkeitsverteilung” kennen und an Beispielen erläutern	
7. Die Begriffe “Erwartungswert”, “Varianz” und “Standardabweichung” einer diskreten Zufallsgröße kennen und anwenden	Bei der Anwendung in Sachaufgaben kommt es vor allem darauf an, dass die Schülerinnen und Schüler verstehen, welche Folgerungen man aus den Kennwerten für das Sachproblem ziehen kann.
8. Die Begriffe “Bernoullikette”, “Binomialverteilung” verstehen und die Formel zur Berechnung der Werte einer Binomialverteilung herleiten	Die explizite Berechnung von Werten der Binomialverteilung soll nur exemplarisch mit wenigen Stufen durchgeführt werden. Beim Lösen von Anwendungsaufgaben werden Tabellen oder Rechner benutzt. Anknüpfend an vorangegangene Erfahrungen bietet es sich auch an, Bernoulliketten zu simulieren und Werte der Binomialverteilung auf diese Weise zu bestimmen.
9. Die Formeln für Erwartungswert und Standardabweichung einer Binomialverteilung kennen und anwenden	Die Formeln können anhand von Plausibilitätsbetrachtungen gewonnen werden; ein Beweis ist nicht gefordert.
10. Eigenschaften der Binomialverteilung kennen, begründen und anwenden	Zur Veranschaulichung charakteristischer Eigenschaften ist die Darstellung von Binomialverteilungen durch Histogramme hilfreich; der Einsatz geeigneter Computerprogramme wird empfohlen.

Ziele / Inhalte (Sach- und Methodenkompetenz)	Hinweise zu Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
11. Sachaufgaben zur Binomialverteilung lösen	Die Schülerinnen und Schüler sollen erfahren, dass viele Zufallsexperimente im täglichen Leben durch eine Binomialverteilung ausreichend gut modelliert werden können.
12. Verstehen, wie man Wahrscheinlichkeiten einer binomialverteilten Zufallsgröße näherungsweise mit Hilfe der Gaußschen Integralfunktion Φ (Standard-Normalverteilung) bestimmt	Die Möglichkeit der Approximation soll anschaulich, z.B. anhand von Histogrammen, einsichtig gemacht werden. Hierfür empfiehlt sich der Einsatz eines geeigneten Computerprogramms. Die Bestimmung der Näherungswerte erfolgt mit Hilfe von Tabellen oder Rechnern. Im Rahmen des pädagogischen Freiraums können darauf aufbauend die Normalverteilung definiert und Anwendungsbeispiele behandelt werden.
13. Funktionsterm, Graph und Eigenschaften der Gaußfunktion φ kennen	
14. Die Struktur des Hypothesentests verstehen	
15. Sachaufgaben zum Testen von Hypothesen lösen und die Ergebnisse interpretieren	Die Sachprobleme werden so vorgegeben, dass sie durch Binomialverteilungen modelliert werden können. Gegebenenfalls werden die Binomialverteilungen durch die Normalverteilung approximiert. Besondere Bedeutung kommt der Interpretation des Ergebnisses eines Hypothesentests zu. Dabei sollen die Schülerinnen und Schüler auch die Grenzen des Verfahrens erkennen. Zumindest einmal sollen die Schülerinnen und Schüler zu einem offen formulierten Sachproblem einen Hypothesentest entwerfen, gesuchte Größen berechnen und die Konsequenzen der Ergebnisse für den Sachverhalt erörtern. Im Leistungskurs soll dies weitgehend selbständig in Gruppen- oder Partnerarbeit erfolgen.

Ziele / Inhalte (Sach- und Methodenkompetenz)	Hinweise zu Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
16. Den Begriff “Konfidenzintervall” und das Verfahren zur Bestimmung eines Konfidenzintervalls für eine unbekannte Wahrscheinlichkeit verstehen 17. Den Zusammenhang zwischen dem Stichprobenumfang und der Länge des Konfidenzintervalls verstehen 18. Sachaufgaben zu Konfidenzintervallen lösen und die Ergebnisse interpretieren	

Fachübergreifendes und fächerverbindendes Lernen

1. Didaktische Begründung

Damit die Schule ihren Bildungsaufgaben in vollem Umfang gerecht werden kann, muss sie zu einer sinnvollen Balance zwischen systematischem und situationsbezogenem Lernen finden. Das bedeutet, dass das Lernen in den einzelnen Fächern einerseits und fachübergreifendes bzw. fächerverbindendes Lernen andererseits unverzichtbar und konstituierende Bestandteile des Unterrichts sind.

Die Gliederung des Unterrichts in einzelne Fächer ist aus mehreren Gründen sinnvoll und notwendig. Durch die Beschränkung auf die Aspekte eines Fachs wird der Komplexitätsgrad der Inhalte vermindert. Schülerinnen und Schüler können in relativ überschaubaren Bereichen Wissen und Fähigkeiten erwerben. Ferner haben die einzelnen Fächer und Fachgruppen jeweils spezifische Methoden der Erkenntnisgewinnung und der Theoriebildung. Schülerinnen und Schüler sollen diese fachbezogenen Denk- und Arbeitsweisen kennenlernen und einüben, um sie dann in komplexeren Zusammenhängen anwenden zu können.

Eine enge Beschränkung auf den Fachunterricht bringt allerdings auch Probleme mit sich.
Zum einen besteht die Gefahr, dass Schülerinnen und Schüler nur noch fachspezifische Facetten von Sachverhalten wahrnehmen. Selbst wenn in unterschiedlichen Fächern das gleiche Thema behandelt wird, stehen die jeweiligen Aspekte häufig unverbunden nebeneinander. Von Seiten der Lehrkräfte an Schulen und Hochschulen und auch von seiten der Wirtschaft wird diese Situation beklagt; man spricht von "Schubladenwissen". Darüber hinaus begünstigt das Lernen isolierter Sachverhalte ein schnelles Vergessen des Gelernten.
Zum anderen erfordern die Wissensexplosion und der schnelle Wandel des Wissens, die komplexen Strukturen und Interdependenz in allen Bereichen von Gesellschaft, Wirtschaft, Wissenschaft und Technik in zunehmendem Maß übergreifendes, vernetztes Denken. Viele aktuelle Probleme sind nicht allein analytisch durch Zerlegung in Teilprobleme und deren Lösung zu bewältigen. Es müssen vielfältige Abhängigkeiten und Verflechtungen berücksichtigt werden.

Das ist auch für den Unterricht relevant, soll er sich doch an der Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler orientieren, zu Entscheidungs- und Handlungskompetenz führen und zur Übernahme von Verantwortung befähigen. Diese Ziele bedingen, dass in verstärktem Maß realitätsnahe Problemstellungen Ausgangspunkt von Lernprozessen sein müssen. Solche Problemstellungen lassen sich aber in der Regel nur im Zusammenwirken von Sachkompetenz aus mehreren Fachgebieten
bewältigen. Kenntnisse und Fähigkeiten in den einzelnen Fächern sowie die Beherrschung der verschiedenen wissenschaftlichen Denkweisen und Arbeitsmethoden sind Voraussetzungen für die Bearbeitung fachübergreifender Problemstellungen.
Die Verfügbarkeit neuer Medien und Technologien erweitert die Möglichkeiten der Informationsbeschaffung und -verarbeitung und öffnet Wege zu einem übergreifenden Denken in Zusammenhängen.

2. Beiträge zur Methoden- und Sozialkompetenz

Im fachübergreifenden und fächerverbindenden Unterricht sollen die Schülerinnen und Schüler, zumindest exemplarisch,

- erfahren, dass für eine Lösung realitätsnaher Problemstellungen meist Aspekte aus verschiedenen Fächern zu berücksichtigen sind, die einander ergänzen bzw. gegeneinander abgewogen werden müssen.
- Wissen und methodische Fähigkeiten, die im Fachunterricht erworben wurden, als Beiträge zur Lösung eines komplexen Problems einbringen und dadurch die Bedeutung des Gelernten für die Bewältigung lebensweltlicher Situationen erfahren.
- lernen, eine Problemstellung von verschiedenen Seiten zu beleuchten und Lösungsansätze nicht vorschnell und unkritisch auf die Verfahren eines bestimmten Fachs einzuschränken.
- erfahren, dass die Zusammenführung verschiedener fachlicher Sichtweisen zu einem tieferen Verständnis eines Sachverhalts führen kann.
- die Bereitschaft und Fähigkeit entwickeln, zur Bearbeitung einer größeren, komplexen Problemstellung mit anderen zu kommunizieren und zu kooperieren.
- lernen, Problemlöseprozesse möglichst selbständig zu organisieren, auch in Partnerarbeit oder im Team.
- lernen, die Ergebnisse eines Arbeitsprozesses zu strukturieren und so zu präsentieren, dass sie von anderen, die nicht an diesem Prozess beteiligt waren, verstanden werden können.

3. Lehrplanbezug

Die Lehrpläne schaffen äußere Voraussetzungen für die Realisierung fachübergreifenden und fächerverbindenden Unterrichts, indem

- keine verbindliche Reihenfolge für die Behandlung des Pflichtstoffs in den Fächern festgelegt wird.
- in gewissen Teilbereichen die Entscheidung über die inhaltlichen Schwerpunkte den Lehrerinnen und Lehrern bzw. den Fachkonferenzen überlassen bleibt.
- durch Beschränkung des Pflichtstoffs zeitliche Freiräume geschaffen werden.
- im Anhang Themenvorschläge für entsprechende Unterrichtseinheiten enthalten sind.

4. Verbindlichkeit

Fachübergreifendes Denken und Arbeiten soll grundsätzlich in der gesamten gymnasialen Oberstufe und in allen Fachkursen an geeigneten Stellen in den Unterricht integriert werden (vgl. 5.1).

Darüber hinaus sollen innerhalb der gymnasialen Oberstufe (Jahrgangsstufen 11 bis 13) alle Schülerinnen und Schüler mindestens einmal an einem fächerverbindenden Unterrichtsvorhaben teilnehmen.

5. Organisationsformen

Fachübergreifendes und fächerverbindendes Lernen kann auf verschiedenen Ebenen erfolgen, die auch unterschiedliche Organisationsformen erfordern. Organisatorisch problemlos sind alle Formen fachübergreifenden und fächerverbindenden Lernens, die sich im Rahmen der Fachkurse realisieren lassen. Um übergreifende Themen behandeln zu können, die einen größeren zeitlichen Rahmen erfordern, oder zu denen mehrere Fächer etwa gleich gewichtige Beiträge liefern, ist es jedoch erforderlich, für den entsprechenden, begrenzten Zeitraum neue, an den Themen orientierte Lerngruppen zu bilden. Dies ist in der gymnasialen Oberstufe auf Grund der differenzierten Kursbelegung nicht immer leicht zu organisieren. Welche Organisationsform die günstigste ist, muss anhand der speziellen Rahmenbedingungen an der einzelnen Schule entschieden werden.

Im Folgenden sind exemplarisch mögliche Organisationsformen für fachübergreifendes und fächerverbindendes Lernen im Rahmen der Fachkurse wie auch in neu gebildeten Lerngruppen aufgeführt. Selbstverständlich sind auch andere als die hier genannten Formen möglich.

5.1 Fachübergreifendes und fächerverbindendes Lernen **im Rahmen der Fachkurse**

* Die Lehrerinnen und Lehrer integrieren in den Fachunterricht an geeigneten Stellen Aspekte anderer Fächer oder Fachbereiche – insbesondere derjenigen, für die sie die Lehrbefähigung besitzen.

* Durch die Einbeziehung außerschulischer Lernorte (z.B. im Rahmen von Exkursionen) werden der Anwendungsbezug und die fachübergreifende Dimension des jeweiligen Themas für die Schülerinnen und Schüler unmittelbar erfahrbar.

* In bestimmten Unterrichtsabschnitten übernimmt eine zweite Lehrkraft allein oder zusammen mit der Fachlehrkraft den Unterricht (team-teaching). Auch können Vorträge von externen Fachleuten in den Unterricht integriert werden, um Bezüge zu anderen Fachrichtungen aufzuzeigen.

* Kurse verschiedener Fächer, die im Stundenplan parallel liegen, werden für mehrere Stunden zur Durchführung eines fächerverbindenden Projekts zusammengefasst. Der fächerverbindende Unterricht tritt für diesen Zeitraum an die Stelle des Fachunterrichts.

5.2 Fachübergreifendes und fächerverbindendes Lernen **in hierfür neu gebildeten Lerngruppen**

* Für eine "Projektphase", die mehrere Tage umfasst, werden die Schülerinnen und Schüler einer Jahrgangsstufe in neue Lerngruppen eingeteilt. In jeder dieser Lerngruppen wird ein fächerverbindendes Thema behandelt. Es ist denkbar, dass in einer Lerngruppe eine einzige Lehrkraft alle Aspekte des Themas behandelt, aber auch, dass im zeitlichen Wechsel oder im team-teaching mehrere Lehrkräfte beteiligt sind.

* Über ein Schuljahr oder ein Halbjahr hinweg wird jeweils eine Doppelstunde pro Woche für alle Schülerinnen und Schüler einer Jahrgangsstufe von Fachunterricht freigehalten. Diese Doppelstunde steht für fächerverbindenden Unterricht in dafür neu gebildeten Lerngruppen zur Verfügung.
  Die Teilnahme daran kann für die Schülerinnen und Schüler über den Pflicht-Fachunterricht hinaus verbindlich gemacht werden. Die so durchgeführten fächerverbin-

denden Unterrichtsprojekte müssen sich nicht über ein ganzes Halbjahr erstrecken, sie können auf wenige Wochen beschränkt sein.

* Ein fächerverbindendes Thema wird in einer dafür neu gebildeten Lerngruppe über einen bestimmten Zeitraum mit einer Doppelstunde pro Woche unterrichtet. Der für diese Doppelstunde vorgesehene Fachunterricht fällt jeweils aus. Die Doppelstunde liegt aber in jeder Woche an einer anderen Stelle im Stundenplan, so dass nicht immer der gleiche Fachunterricht betroffen ist.

* In einer Jahrgangsstufe sprechen sich einige Lehrerinnen und Lehrer verschiedener Fächer ab, ein ausgewähltes übergreifendes Thema zeitlich parallel in ihren Kursen unter fachlichem Aspekt zu behandeln. Der zeitliche Rahmen kann einige Stunden umfassen, sich aber auch auf mehrere Wochen erstrecken. Am Ende dieses Zeitraums finden “Projekttage” statt, auf denen allen Schülerinnen und Schülern die Ergebnisse der fachbezogenen Arbeit vorgestellt werden. In dieser Präsentation, in die auch externe Fachleute einbezogen werden können, wird der fächerverbindende Charakter des Themas erfahrbar.

A n h a n g

Themenvorschläge und Anregungen für fachübergreifende und fächerverbindende Unterrichtseinheiten

Im Folgenden sind mehrere Themenbereiche für fachübergreifende und fächerverbindende Unterrichtsvorhaben aufgeführt. Für jeden Themenbereich sind in Form von Bausteinen thematische Schwerpunkte genannt, die sich für eine Zusammenarbeit von Mathematik mit anderen Fächern eignen und es gestatten, fachübergreifende Leitlinien und Vernetzungen aufzuzeigen.
Die Auswahl der Themenbereiche und thematischen Bausteine richtet sich u.a. danach, ob ein Bezug zu den Fachlehrplänen der jeweils betroffenen Fächer hergestellt werden kann und ob bereits gewisse methodische Erfahrungen vorliegen oder Handreichungen zur Verfügung stehen.

Die aufgeführten Themen sind nicht verbindlich. Sie sind als Beispielsammlung gedacht und erheben in keiner Weise den Anspruch auf Vollständigkeit.

Die Themenvorschläge und die aufgezeigten Bezüge verschiedener Fächer zu dem jeweiligen Rahmenthema sollen anregen und ermuntern, fachübergreifende und fächerverbindende Unterrichtseinheiten zu planen, zu erproben und Erfahrungen zu sammeln. In der Regel werden Fachlehrerinnen und -lehrer verschiedener Fächer kooperieren und ihre jeweilige Sachkompetenz bei der Planung und Durchführung eines Unterrichtsvorhabens einbringen.

Umfang und Komplexität eines solchen Vorhabens werden sich an der zur Verfügung stehenden Zeit und den Möglichkeiten der Realisierung orientieren. Auch kleinere Projekte, an denen außer Mathematik nur ein oder zwei weitere Fächer beteiligt sind und bei denen nur einige der für das jeweilige Fach aufgeführten “möglichen Beiträge” berücksichtigt werden, können der Zielsetzung des fachübergreifenden und fächerverbindenden Unterrichts gerecht werden.

Vorbemerkung zu den Themenvorschlägen 1. und 2.:
Deterministisches Chaos und Fraktale sind fachlich eng miteinander verknüpft. Dennoch werden im Folgenden zu diesem Themenkomplex *zwei* Unterrichtsvorhaben beschrieben, die sich in der Schwerpunktsetzung unterscheiden, “Chaotische Prozesse” und “Fraktale”.

1. Chaotische Prozesse

Im Mittelpunkt einer Unterrichtseinheit zum Thema “Chaotische Prozesse” sollte die Untersuchung und Erklärung des Verhaltens ausgewählter chaosfähiger Systeme stehen. Als Beispiele sind vor allem physikalische oder biologische Prozesse geeignet. Anhand experimenteller Befunde können charakteristische Eigenschaften des Chaos und Wege ins Chaos erkannt werden. Zur Erklärung chaotischer Prozesse werden mathematische Begriffe und Verfahren benötigt, z.B. Rekursionen (Iterationen), Differentialgleichungen und deren numerische Lösung sowie die Interpretation von Graphen. Darüber hinaus können wissenschaftstheoretische und weltanschaulich-philosophische Fragen thematisiert werden, z.B. anknüpfend an die beobachtete Verletzung der starken Kausalität.

Im Folgenden sind für das Fach Mathematik und für drei weitere Fächer Beiträge aufgeführt, die sie zu dem Thema leisten können. Zur Durchführung eines fachübergreifenden Unterrichtsvorhabens “Chaotische Prozesse” ist es jedoch nicht unbedingt erforderlich, dass sich *alle* diese Fächer beteiligen. Je nachdem, welche inhaltlichen Schwerpunkte gesetzt werden sollen, kann ein solches Unterrichtsvorhaben in Verbindung von Mathematik mit nur *einem* anderen Fach durchgeführt werden. Es ist auch möglich, nur einzelne der für das jeweilige Fach aufgeführten “möglichen Beiträge” herauszugreifen und in einem kleineren fachübergreifenden Projekt zu bearbeiten.

Mögliche Beiträge des Fachs Mathematik	
Rekursive Folgen	Rekursive Folgen gehören im Grund- und Leistungsfach zum Pflichtstoff
Logistische Gleichung	Die logistische Gleichung kann behandelt werden – als spezielles Beispiel einer rekursiven Folge – als Gleichung zur Beschreibung spezieller Wachstumsprozesse, anknüpfend an das exponentielle Wachstum
Sensitivität	Beschreibung des exponentiellen Fehlerwachstums, Ljapunov-Exponent
Feigenbaumdiagramme	Darstellungform, die die Wege ins Chaos sichtbar werden lässt

Mögliche Beiträge des Fachs Physik	
Schwingungsvorgänge	Beobachtung chaotischen Verhaltens bei Schwingungen
Beschreibung von Schwingungen durch Differentialgleichungen	Im Lehrplan Mathematik gehören Differentialgleichungen und ihre numerische Lösung zum Pflichtstoff im Leistungsfach.
Bifurkationen; Chaos	Untersuchung der Abhängigkeit von Kontrollparametern, Analyse von Weg-Zeit- bzw. Winkel-Zeit-Diagrammen
Sensitivität	Beobachtung der Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen
Feigenbaumdiagramme	Darstellungsform, die eine Untersuchung der Wege ins Chaos ermöglicht
Paradigmenwechsel in der Wissenschaftstheorie	– Nichtlineare Systeme – Verletzung der starken Kausalität – Abgrenzung des Begriffs “deterministisches Chaos” gegen das umgangssprachliche Verständnis von Chaos

Mögliche Beiträge des Fachs Biologie	
Populationsentwicklung, Zeitreihen, Logistisches Wachstum	Beispiele für natürliche Entwicklungsprozesse, die durch logistisches Wachstum modelliert werden können
Bifurkationen; Chaos	Untersuchung der Abhängigkeit einer Populationsentwicklung von den jeweiligen Parametern
Sensitivität	Beobachtung der Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen
Paradigmenwechsel in der Wissenschaftstheorie	Grenzen der Vorhersagbarkeit

Mögliche Beiträge der Fächer Religion / Ethik / Philosophie	
Chaos	Wandel der Interpretation des Begriffs Chaos in der Philosophiegeschichte
Paradigmenwechsel im Weltbild	Möglicher Paradigmenwechsel in der Wissenschaftstheorie – analoge philosophische Strömungen und Weltbilder

2. Fraktale

Im Mittelpunkt einer Unterrichtseinheit zu diesem Thema steht die Beobachtung, Beschreibung und Erzeugung fraktaler Strukturen. An natürlichen Objekten aus Physik, Chemie, Biologie und Erdkunde können solche Strukturen beobachtet werden; durch Iteration können Fraktale systematisch erzeugt werden. Die entsprechenden Algorithmen führen in Mathematik bzw. Informatik zu einem tieferen Verständnis. Zur qualitativen und quantitativen Beschreibung sind die mathematischen Begriffe Selbstähnlichkeit und fraktale Dimension geeignet. Ein weiterer Aspekt des Themas kann durch die Analyse künstlerischer Werke, in denen von der Selbstähnlichkeit als Gestaltungsmittel Gebrauch gemacht wird, einbezogen werden.

Im Folgenden sind für das Fach Mathematik und für vier weitere Fächergruppen Beiträge aufgeführt, die sie zu dem Thema leisten können. Zur Durchführung eines fachübergreifenden Unterrichtsvorhabens "Fraktale" ist es jedoch nicht unbedingt erforderlich, dass sich *alle* diese Fächer beteiligen. Je nachdem, welche inhaltlichen Schwerpunkte gesetzt werden sollen, kann ein solches Unterrichtsvorhaben in Verbindung von Mathematik mit nur *einem* anderen Fach durchgeführt werden. Es ist auch möglich, nur einzelne der aufgeführten "möglichen Beiträge" herauszugreifen und diese aus der Sicht verschiedener Fächer zu betrachten.

Mögliche Beiträge des Fachs Mathematik

Iterationen	Die Iteration ist ein Grundelement der fraktalen Geometrie. Der Lehrplan sieht vor, dass Erfahrungen mit Iterationen unter anderem gewonnen werden im Zusammenhang mit rekursiven Folgen, numerischen Verfahren zur Nullstellenbestimmung und zum Lösen von Differentialgleichungen.
Erzeugung von Fraktalen durch geometrisch-konstruktive Iteration	Beispiele: Sierpinski-Dreieck, Schneeflockenkurve, Menger-Schwamm
Iterationen mit komplexen Zahlen	Beispiele: Julia-Mengen, Mandelbrot-Menge
Iterierte Funktionensysteme	Hier kann unmittelbar an die Verkettung affiner Abbildungen angeknüpft werden, wenn im Mathematikunterricht das Wahlpflichtgebiet "Geometrische Abbildungen und Matrizen" (Grundfach) bzw. "Vektoren und Matrizen" (Leistungsfach) gewählt wurde.
Selbstähnlichkeit	Erkennen und Untersuchen einer zentralen Eigenschaft von Fraktalen
Fraktale Dimension	Quantifizierung von Selbstähnlichkeit; Möglichkeit, den Grad der Komplexität fraktaler Strukturen zu messen

Mögliche Beiträge der Fächer Physik / Chemie	
Fraktale Strukturen an physikalischen und chemischen Objekten	Beobachtung, Beschreibung und Erzeugung fraktaler Strukturen, die in physikalischen oder chemischen Experimenten erzeugt werden
Selbstähnlichkeit	Qualitative Erfassung fraktaler Strukturen, Ausblick auf die Bedeutung in der wissenschaftlichen Forschung

Mögliche Beiträge der Fächer Biologie / Erdkunde	
Fraktale Strukturen in der Natur	Beobachtung und Beschreibung fraktaler Strukturen an biologischen oder geographischen Naturgebilden
Selbstähnlichkeit	Vorbereitung des Begriffs der fraktalen Dimension, Ausblick auf die Bedeutung in der wissenschaftlichen Forschung

Mögliche Beiträge des Fachs Bildende Kunst	
Fraktale Strukturen in künstlerischen Werken	Selbstähnlichkeit als Gestaltungsmittel in der Kunst, vor allem in der surrealistischen
Selbstähnlichkeit	Vergleich mit selbstähnlichen Figuren in der Natur und in der Mathematik

Mögliche Beiträge des Fachs Informatik	
Algorithmen zur Erzeugung fraktaler Strukturen	Algorithmen zu Rekursionen und Iterationen, die fraktale Gebilde erzeugen
Selbstähnlichkeit	Entwickeln des Begriffs aus dem Algorithmus

3. Darstellung räumlicher Objekte

Im Mittelpunkt einer Unterrichtseinheit zu diesem Thema steht die Frage, mit welchen Mitteln bei der zweidimensionalen Darstellung dreidimensionaler Objekte ein räumlicher Eindruck erzeugt werden kann. Verschiedene Fächer können zur Beantwortung dieser Frage jeweils unterschiedliche Beiträge leisten. Das Fach Mathematik stellt Verfahren zur zeichnerischen Darstellung räumlicher Objekte und die rechnerische Erfassung von Abbildungen durch Matrizen bereit. Daran anknüpfend können im Fach Informatik die entsprechenden Datenstrukturen und Algorithmen thematisiert werden. Die Vektorgrafik kann als Möglichkeit der Bilderzeugung angesprochen werden. Im Fach Bildende Kunst werden an ausgewählten Kunstwerken die Darstellungsverfahren unter künstlerischen Gesichtspunkten betrachtet; darauf aufbauend können weitere Möglichkeiten zur Raumdarstellung und Perspektive entdeckt werden.

Im Folgenden sind für das Fach Mathematik und für zwei weitere Fächer Beiträge aufgeführt, die sie zu dem Thema leisten können. Zur Durchführung eines fächerverbindenden Unterrichtsvorhabens "Darstellung räumlicher Objekte" ist es jedoch nicht unbedingt erforderlich, dass sich *alle* diese Fächer beteiligen. Je nachdem, welche inhaltlichen Schwerpunkte gesetzt werden sollen, kann ein solches Unterrichtsvorhaben in Verbindung von Mathematik mit nur *einem* anderen Fach durchgeführt werden.

Mögliche Beiträge des Fachs Mathematik

Darstellung räumlicher Objekte im Schrägbild	Aufbauend auf Erfahrungen mit Schrägbildern in der Sekundarstufe I und auf der zeichnerischen Darstellung vektoriell gegebener Geraden und Ebenen im Raum können Eigenschaften von Schrägbildern bewusst gemacht und bei der Analyse von Bildern angewendet werden.
Beschreibung von Kongruenzabbildungen im Raum durch Vektoren und Matrizen	Im Hinblick auf die Computergrafik vor allem: Drehungen von Körpern im Raum um geeignete Achsen
Parallelprojektionen	Entstehung von Schrägbildern bzw. Rissen durch Parallelprojektion; Darstellung von Parallelprojektionen durch Matrizen; Möglichkeit der Anbindung an Erfahrungen mit Abbildungsmatrizen
Zentralprojektion	Konstruktion; Eigenschaften

Mögliche Beiträge des Fachs Informatik	
Algorithmen, Datenstrukturen, Programmieren	Darstellung räumlicher Objekte auf dem Computer
Koordinatensysteme und Transformationen	3-D-Weltsystem, 3-D-Clipping, 3-D-Betrachtersystem, 2-D-Projektionssystem, Bildschirmkoordinaten
Animationen	Effiziente Algorithmen, verschiedene Bildschirmseiten
Verdeckte Linien	Geeignete Darstellung geometrischer Objekte

Mögliche Beiträge des Fachs Bildende Kunst	
Raumwahrnehmung und Raumdarstellung	Raumdarstellungen und Perspektive in verschiedenen Epochen
Perspektive	Verschiedene Arten der Perspektive

4. Simulation dynamischer Vorgänge

Im Mittelpunkt einer Unterrichtsreihe zu diesem Thema steht die mathematische Modellierung dynamischer Systeme, die es erlaubt, die entsprechenden Abläufe zu simulieren. Aus der Simulation können Aussagen über Abhängigkeiten zwischen Systemgrößen oder über das zeitliche Verhalten des Systems gewonnen werden, die wegen der Vernetzung nicht direkt abzulesen sind. Beispiele für solche komplexen dynamischen Systeme finden sich vor allem in den Naturwissenschaften und im gemeinschaftskundlichen Bereich. Diese Fächer stellen das Sachwissen zur Verfügung, das zur Modellierung der Prozesse und zur Auswertung der Ergebnisse von Simulationen unverzichtbar ist. Das Fach Mathematik stellt die Verfahren für die Modellierung bereit, insbesondere verschiedene Funktionstypen, den Ableitungsbegriff, die Beschreibung dynamischer Prozesse durch Differenzen- oder Differentialgleichungen und deren numerische Lösung. Für die Darstellung und Durchführung der Simulationen bieten sich in allen Fächern grafische Modellbildungssysteme an. Darüber hinaus kann im Fach Informatik die algorithmische Struktur solcher Systeme analysiert werden.

Im Folgenden sind für das Fach Mathematik und für vier weitere Fächer Beiträge aufgeführt, die sie zu dem Thema leisten können. Zur Durchführung eines fächerverbindenden Unterrichtsvorhabens "Simulation dynamischer Vorgänge" ist es jedoch nicht unbedingt erforderlich, dass sich *alle* diese Fächer beteiligen. Je nachdem, welche inhaltlichen Schwerpunkte gesetzt werden sollen, kann ein solches Unterrichtsvorhaben in Verbindung von Mathematik mit nur *einem* anderen Fach durchgeführt werden.

Mögliche Beiträge des Fachs Mathematik

Mathematische Modellierung	Prozess der Modellbildung (vgl. Kapitel "Problemlösen mit mathematischen Methoden – Modellbildung")
Funktionale Zusammenhänge, Eigenschaften von Funktionen	
Differenzen- bzw. Differentialquotient	Interpretation des Differenzen- bzw. Differentialquotienten als mittlere bzw. momentane Änderungsrate
Differenzengleichungen, Differentialgleichungen	Differenzengleichungen können im Zusammenhang mit rekursiven Folgen angesprochen werden; Differentialgleichungen werden im Leistungskurs behandelt.
Iterationen, numerische Lösungsverfahren für Differentialgleichungen	

Mögliche Beiträge des Fachs Informatik	
Handhabung und Analyse grafischer Modellbildungssysteme	Grafische Modellbildungssysteme als ein möglicher Zugang zu Algorithmen
Neuronale Netze	Untersuchung neuronaler Netze als ein mögliches Projektthema

Mögliche Beiträge des Fachs Physik	
Beschreibung einer zeitlichen Entwicklung durch Differenzen- oder Differentialgleichungen	z.B. Beschreibung des Zusammenhangs zwischen Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung
Komplexe mechanische und elektrische Schwingungsvorgänge	z.B. gekoppelte Pendel, Feder-Faden-Pendel, Schwingungen mit großer Amplitude, gedämpfter elektromagnetischer Schwingkreis
Fall- und Wurfbewegungen	Untersuchung der Bewegungen unter Berücksichtigung des Luftwiderstands
Radioaktiver Zerfall	Zerfallsgesetz, Gleichgewicht der Zerfallsprodukte, radiometrische Altersbestimmung
Kepler-Ellipsen	Gewinnung der Keplerschen Gesetze aus den Newtonschen Bewegungsgesetzen und dem Gravitationsgesetz durch Simulation
Energieflüsse bei physikalischen Prozessen	
Simulation als Methode der Erkenntnisgewinnung	Schrittweise Korrektur des Modells durch Vergleich der Simulationsergebnisse mit experimentellen Befunden

Mögliche Beiträge des Fachs Biologie	
Möglichkeiten der Beschreibung von zeitlichen Entwicklungen	z.B. Wirkungsdiagramme, Änderungsraten (Differenzenquotient), Differenzengleichungen
Populationsentwicklungen	z.B. lineare, exponentielle, beschränkte, logistische Wachstums- bzw. Abnahmeprozesse
Konkurrenz zweier Populationen	z.B. Verdrängung einer Population durch die andere, Koexistenz zweier Populationen, Räuber-Beute-Systeme
Komplexe Ökosysteme	
Konzentrationsentwicklungen	z.B. Hormonspiegel, Nikotinkonzentration im Blut, Blutalkohol, Sauerstoffgehalt in der Raumluft; Untersuchung der Abhängigkeit von verschiedenen Einflüssen
Bakterien und Antikörper, Verlauf einer Epidemie	

Mögliche Beiträge des Fachs Gemeinschaftskunde	
Möglichkeiten der Beschreibung von zeitlichen Entwicklungen	z.B. Wirkungsdiagramme, Änderungsraten (Differenzenquotient), Differenzengleichungen
Bevölkerungsentwicklung, Ressourcenentwicklung	Verschiedene Modelle, Prognosen
Wirtschaftssysteme, Ökosysteme	Prognosen über das zeitliche Verhalten komplexer Öko- und Wirtschaftssysteme und über deren Abhängigkeit von verschiedenen Faktoren

5. Monte-Carlo-Methoden

Im Mittelpunkt einer Unterrichtsreihe zu diesem Thema steht die Erarbeitung von stochastischen Simulationen zum Lösen von Anwendungsproblemen.
Während es Sache der Mathematik ist, die grundlegende Struktur solcher Methoden und ihre Einbettung in die Theorie aufzuzeigen, stellen die naturwissenschaftlichen und gemeinschaftskundlichen Fächer das den Anwendungen zugrundeliegende Sachwissen bereit. Das Fach Informatik schafft die Voraussetzungen zur Übertragung der Simulationen auf den Computer; eine Problematisierung der algorithmischen Erzeugung von Pseudozufallszahlen kann als weiterer Beitrag des Fachs Informatik zu einer Unterrichtsreihe gesehen werden.

Im Folgenden sind für das Fach Mathematik und für vier weitere Fächer Beiträge aufgeführt, die sie zu dem Thema leisten können. Zur Durchführung eines fächerverbindenden Unterrichtsvorhabens “Monte-Carlo-Methoden” ist es jedoch nicht unbedingt erforderlich, dass sich *alle* diese Fächer beteiligen. Je nachdem, welche inhaltlichen Schwerpunkte gesetzt werden sollen, kann ein solches Unterrichtsvorhaben in Verbindung von Mathematik mit nur *einem* anderen Fach durchgeführt werden, indem nur Sachprobleme aus *diesem* Fach Zugrundelegen werden.

Mögliche Beiträge des Fachs Mathematik

Mathematische Modellierung	Prozess der Modellbildung (vgl. Kapitel “Problemlösen mit mathematischen Methoden – Modellbildung”)
Simulation von Zufallsexperimenten	Die Simulation von einfachen Zufallsexperimenten gehört im Leistungsfach zum Pflichtstoff, im Grundfach ist sie Thema des Wahlpflichtbereichs “Simulation von Zufallsexperimenten”.
Lösung spezieller Sachprobleme mit Hilfe stochastischer Simulationen	z.B. Warteschlangen, Markowketten

Mögliche Beiträge des Fachs Biologie

Diffusion	Passive Transportvorgänge in biologischen Systemen
Vererbung	Mendelsche Regeln
Evolution	Mutation, Selektion, Isolation, Genfluss, Gendrift, Rekombination

Mögliche Beiträge des Fachs Physik	
Streuversuche	z.B. Streuversuch von Rutherford
Radioaktiver Zerfall	z.B. Deutung von Zerfallskurven
Dualismus Welle - Teilchen	Deutung der Wellenfunktion durch Aufenthaltswahrscheinlichkeiten, z.B. am Interferenzbild beim Doppelspalt
Gaskinetik	Druck, Temperatur, Geschwindigkeitsverteilung

Mögliche Beiträge des Fachs Informatik	
Algorithmen, Datenstrukturen, Programmieren	Durchführung stochastischer Simulationen am Computer
Zufallszahlen	Verfahren zum Erzeugen und Testen von Pseudozufallsziffern

Mögliche Beiträge des Fachs Gemeinschaftskunde	
Planungsprozesse	z.B. Verkehrsplanungen, Größe eines Hafens, Kapazität eines Nachrichtennetzes

6. Das Problem des Unendlichen

In einem Projekt, das das Problem des Unendlichen in den Mittelpunkt stellt, soll für die Schülerinnen und Schüler erfahrbar werden, dass sich die Bedeutung der Mathematik als Wissenschaft nicht auf den Anwendungsbezug reduzieren lässt. So ist eine Zuordnung der Mathematik zu den Naturwissenschaften nur die halbe Wahrheit. Mathematik ist genau so gut eine Geisteswissenschaft; seit eh und je bestehen enge Bezüge zur Philosophie. Dies kann für Schülerinnen und Schüler deutlich werden, wenn sie erkennen, wie sich Philosophen und Mathematiker im Laufe der Geistesgeschichte mit dem Begriff des Unendlichen auseinandergesetzt haben.
Die Frage nach dem Unendlichen führt auch zu Grundfragen naturwissenschaftlichen Erkennens und naturwissenschaftlicher Methoden. Hier rückt vor allem die Physik in den Blick. So lassen sich je nach gewünschter Schwerpunktsetzung ganz unterschiedliche Facetten zu einem Projekt zusammensetzen.

Das Problem des Unendlichen übt auf Schülerinnen und Schüler in der Regel eine große Faszination aus. Häufig sind es die Paradoxien, die vermeintliche Sicherheiten aufbrechen und zu tiefergehenden Fragen führen. Im Mittelpunkt des Projekts soll deshalb auf keinen Fall eine Darstellung verschiedener Theorien, mathematischer Definitionen und naturphilosophischer Aussagen stehen. Vielmehr sollten aus einer Betroffenheit der Schülerinnen und Schüler heraus Perspektiven erarbeitet werden, wie man in unterschiedlichen Epochen einerseits und in den verschiedenen Wissenschaften andererseits versucht, sich geistig mit der Herausforderung des Unendlichen auseinanderzusetzen.

Im Folgenden sind für das Fach Mathematik und für drei weitere Fächergruppen Beiträge aufgeführt, die sie zu dem Thema leisten können. Zur Durchführung eines fächerverbindenden Unterrichtsvorhabens “Das Problem des Unendlichen” ist es jedoch nicht erforderlich, daß sich *alle* Fächer beteiligen und *alle* aufgeführten Themen und Aspekte behandelt werden. Je nachdem, welche inhaltlichen Schwerpunkte gesetzt werden sollen, kann ein solches Unterrichtsvorhaben in Verbindung von Mathematik mit nur *einem* anderen Fach durchgeführt werden. Es ist auch möglich, nur einen einzigen der genannten Aspekte aufzugreifen und diesen aus der Perspektive der verschiedenen Fächer zu beleuchten.

Mögliche Beiträge des Fachs Mathematik

Grenzwert von Folgen und reellen Funktionen für $x \to \infty$	Intuitives Erfassen von Grenzprozessen Paradoxien des Unendlichen, die intuitiv gewonnene Sicherheiten in Frage stellen Inhaltliche Vorstellungen von dem Prozeß des unendlichen Fortschreitens und Grenzen des Vorstellungsvermögens Stufen der mathematischen Präzisierung des Grenzwertbegriffs Einsicht, daß ∞ keine reelle Zahl ist

Das Prinzip der vollständigen Induktion	
Mengen mit unendlich vielen Elementen	Gibt es unendlich viele Primzahlen/Primzahlzwillinge? Gleichmächtigkeit von Mengen Abzählbarkeit und Überabzählbarkeit; transfinite Kardinalzahlen Das aktual Unendliche im Vergleich zum potentiell Unendlichen
Inkommensurabilität und Irrationalität; Lückenlosigkeit der Menge der reellen Zahlen; Kontinuum	Das Problem der unbegrenzten Teilbarkeit
Erweiterung des euklidischen Raums zum projektiven Raum	Einführung uneigentlicher (unendlich ferner) Punkte und Geraden

Mögliche Beiträge der Fächer Physik / Astronomie	
Größenordnungen in der Natur; der Aufbau der Materie; die Idee des Elementaren	Eine Reise durch den Mikro- und Makrokosmos Grundfragen der Menschheit – naturwissenschaftliche Antworten
Probleme mit den Begriffen “unendlich kleine Größen” und “unbegrenzte Teilbarkeit”; Singularitäten	Beschreibung physikalischer Gesetze mit Hilfe der Infinitesimalrechnung Begriff des Differentials in Physik und Mathematik
Struktur und physikalische Evolution des Kosmos; Expansion des Universums; Vorstellungen zur Raumzeit als geschlossene Fläche ohne Begrenzung	“Planckzeit” und “Plancklänge” als kleinste Größen sinnvoller physikalischer Theoriebildung Urknalltheorie; Hintergrundstrahlung; Hubble-Gesetz; Weltalter

Mögliche Beiträge der Fächer Philosophie / Religion	
Die Paradoxien der Eleaten	
Die Unterscheidung von potentiell unendlich und aktual unendlich bei Aristoteles	Potentiell unendlich: Das unendliche Fortschreiten in der Zeit; die unendliche Teilung räumlicher Größen Aktual unendlich: Das *Ergebnis* des unendlichen Fortschreitens (z.B. Exhaustion einer Fläche) bzw. einer unendlichen Teilung (z.B. Durchlaufen einer Strecke aus unendlich vielen Teilstrecken)
Das Unendliche in Mathematik, Philosophie und Theologie bei Nikolaus von Cues	Mathematik als Sinnbild theologischer Aussagen Das Verhältnis des Unendlichen zum Endlichen in Mathematik und Theologie (coincidentia oppositorum) Aufbrechen der mittelalterlichen christlichen Vorstellungen von der Endlichkeit der Welt
Theorien zur Unendlichkeit von Raum und Zeit in der Neuzeit	
Endlichkeit und Unendlichkeit als dialektische Einheit (Hegel)	
Cantors metaphysische Deutung des Aktual-Unendlichen	Briefwechsel mit Kardinal Franzelin, Halle 1886

Mögliche Beiträge des Fachs Deutsch	
Passagen in der deutschen Literatur, in denen das Unendliche thematisiert wird	Beispiel: Musils Roman *Die Verwirrungen des Zöglings Törleß*

7. Argumentieren und Beweisen

Im Mittelpunkt dieser Unterrichtsreihe steht die Betrachtung logischer Strukturen beim Argumentieren, Begründen und Beweisen in verschiedenen Fachgebieten. Daran anknüpfend kann das Verhältnis zwischen natürlicher Sprache und wissenschaftlicher Terminologie thematisiert werden.

Die Analyse der logischen Struktur von mathematischen Sätzen, Satzsystemen und ihrer Beweise führt zu einem tieferen Verständnis des Aufbaus der Mathematik als Wissenschaft und sie erleichtert es, mathematische Sätze zu verstehen, Beweisansätze zu finden und einen Beweis zielgerichteter zu führen. Der Vergleich mit dem Definieren, Begründen und Beweisen in anderen Fächern zeigt gemeinsame logische Strukturen auf, fördert damit die Fähigkeit zu folgerichtigem Argumentieren und verhilft zu der Einsicht, sich an einmal getroffene Vereinbarungen zu halten.

Das Verhältnis zwischen natürlicher Sprache und wissenschaftlicher Terminologie ist unter anderem durch kontextabhängige Begriffe einerseits und kontextfreie Definitionen andererseits gekennzeichnet. Während in der Sprache des alltäglichen Umgangs ein Wort seine Bedeutung insbesondere durch Sätze erhält, in denen es vorkommt, benötigt die Sprache der Wissenschaft kontextfreie Wortbedeutungen. Sie weist im Gegensatz zur natürlichen Sprache, zumindest in Teilbereichen, Merkmale formaler Systeme auf. Am Beispiel der Sprache der Mathematik läßt sich das besonders gut verdeutlichen, da sie, wie kaum eine andere Wissenschaftssprache, durch die formale Logik geprägt ist.

Im Folgenden sind für das Fach Mathematik und drei weitere Fächer Beiträge aufgeführt, die sie zu dem Thema “Argumentieren und Beweisen” leisten können. Zur Durchführung eines fächerverbindenden Unterrichtsvorhabens ist es jedoch nicht unbedingt erforderlich, daß sich *alle* diese Fächer beteiligen. Je nachdem, welche inhaltlichen Schwerpunkte gesetzt werden sollen, kann ein solches Unterrichtsvorhaben in Verbindung von Mathematik mit nur *einem* anderen Fach durchgeführt werden. Es ist auch möglich, nur einzelne der aufgeführten “möglichen Beiträge” herauszugreifen und diese aus der Sicht verschiedener Fächer zu betrachten.

Mögliche Beiträge des Fachs Mathematik

Mathematische Sätze und ihre logische Struktur	Analyse der Struktur mathematischer Sätze mit den Mitteln der Aussagen- und Prädikatenlogik
Direkter Beweis	Beweis von Implikationen und Äquivalenzaussagen, Umkehrbarkeit von Aussagen
Indirekter Beweis	Logische Struktur eines indirekten Beweises, Negationen von Implikationen und Äquivalenzen, Negation von Allaussagen und Existenzaussagen
Widerspruchsfreiheit und Vollständigkeit in Axiomensystemen, Paradoxien	Russelsches Paradoxon, Satz von Gödel

Mögliche Beiträge des Fachs Philosophie	
Grundsätze der Ontologie	Satz vom ausgeschlossenen Dritten, Satz vom Widerspruch, Satz der Identität
Aussagenlogik	Satz, Aussage, Aussageform, Konjunktion, Disjunktion, Implikation, Äquivalenz, Wahrheitswert
Prädikatenlogik	Subjekt, Prädikat, Allaussage, Existenzaussage, Negation
Syllogistik	Satz, Urteil, Urteilsarten, Prämissen, Formalisierung, Deduktion, Induktion, Richtigkeit
Formale Systeme und natürliche Sprache	Kontextfreiheit und Kontextsensitivität, Widerspruchsfreiheit und Vollständigkeit

Mögliche Beiträge des Fachs Deutsch	
Elemente der Sprachanalyse	Semantik, Denotation, Konnotation, Satzgrammatik, Ersatzprobe, Umstellprobe
Analyse argumentativer Texte auf ihre logische Struktur	Gültigkeit, Stringenz und Schlüssigkeit von Argumenten und deren Beurteilung
Tautologien und selbstbezügliche Aussagen	Tautologien als Mittel rhetorischer Verstärkung, Bestätigungs- und Leerformeln, Paradoxien
Grenzen logischen Argumentierens	“analytische” und “substantielle” Argumentation, Scheinlogik Grenzen des Syllogismus, Unterscheidung formale Logik und Alltagsargumentation, Bedeutung der Kommunikationssituation (Watzlawick)

Mögliche Beiträge des Fachs Religion	
(philosophische) Gottesbeweise	Argumente für und gegen Gott
Religionskritik	Problem der Rechtfertigung Gottes, Analyse religionsphilosophischer Quellen

8. Gotische Maßwerke

Eine Unterrichtsreihe zu diesem Thema widmet sich der Erzeugung, der Analyse und der Interpretation gotischer Maßwerkfenster. Das Thema ist wie kaum ein anderes geeignet, exemplarisch zu zeigen wie ein Kunstwerk unter Einbeziehung vielfältiger philosophisch-religiöser, historischer, kunstgeschichtlicher und mathematischer Aspekte verstanden, interpretiert und “erlebt” werden kann. Ein breitgefächert arbeitsteiliges Vorgehen ist leicht möglich.

Obwohl das Konstruieren mit Zirkel und Lineal für dieses Thema sicher grundlegend ist, so ist es doch oft mühsam und mit der erforderlichen Genauigkeit kaum durchführbar. Erst die rechnerische Durchdringung schafft die Voraussetzungen, Konstruktionen auf den Computer zu übertragen. So werden auch umfangreiche Rosettenfenster, Friese oder ganze Fassaden “konstruierbar”. Das moderne Hilfsmittel ermöglicht mit seiner Präzision das “mittelalterliche Erleben” einer exakten Konstruktion in ihrer Ganzzahligkeit und oft genialen Einfachheit. Auch lässt sich für manche schwierige Konstruktion rechnerisch nachprüfen, ob sie wirklich das leistet, was sie vorgibt. Umgekehrt ermöglicht die Rechnung oft das Finden einer Konstruktionsmöglichkeit. Die Notwendigkeit, geometrische Abbildungen wie Verschiebung, Drehung, Streckung rechnerisch zu beschreiben, wird augenscheinlich. Computergrafische Grundlagen lassen sich am begrenzten Problem beziehungsreich vermitteln.

Im Folgenden sind für das Fach Mathematik und für fünf weitere Fächer Beiträge aufgeführt, die sie zu dem Thema leisten können. Zur Durchführung eines fächerverbindenden Unterrichtsvorhabens “Gotische Maßwerke” ist es jedoch nicht unbedingt erforderlich, dass sich *alle* diese Fächer beteiligen. Je nachdem, welche inhaltlichen Schwerpunkte gesetzt werden sollen, kann ein solches Unterrichtsvorhaben in Verbindung von Mathematik mit nur *einem* anderen Fach durchgeführt werden, auch wenn dadurch nur einzelne der “möglichen Beiträge” berücksichtigt werden.

Mögliche Beiträge des Fachs Mathematik	
Analytische Geometrie in der Ebene	Geometrische Konstruktionen und rechnerisches Nachbilden, Beschreibung von Kreisbögen mit Winkelfunktionen
Verschiebung, Drehung, zentrische Streckung (Skalierung)	Geometrische Abbildungen, Matrizen, Transformation auf ein anderes Koordinatensystem

Mögliche Beiträge der Fächer Religion / Ethik / Philosophie	
Religiöser Hintergrund der Gotik	Neuplatonismus, Reinheit von Konstruktion und Proportion, Harmonie des Kosmos, Symbolik

Mögliche Beiträge des Fachs Geschichte

Lebensformen und Denkweisen im Mittelalter	Einheitlichkeit und Geschlossenheit des Weltbildes, zentrale Bedeutung der christlichen Lehre, Bedeutung der Sakralbauten, heimische Kirchen

Mögliche Beiträge des Fachs Bildende Kunst

Gotik als Kunstepoche	Differenz der Raumstrukturen in romanischer und gotischer Baukunst, Architektur als Zeichensystem und Bedeutungsträger
Hermeneutisches Verstehen von Kunstwerken	Kunstgeschichte als Motivgeschichte
Computer als visuelles Medium	Verknüpfung von ästhetischen Momenten mit High-Tech-Möglichkeiten

Mögliche Beiträge des Fachs Informatik

Algorithmen, Datenstrukturen, Programmieren	Darstellung zweidimensionaler Objekte auf dem Computer
Grundlagen der Computergrafik	Weltsystem, Bildsystem, Transformationen

Mögliche Beiträge des Fachs Physik

Statik in der Gotik	Romanische und gotische Gewölbe, Strebepfeiler u.a.